Messtechnik

Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
Fakultät Elektro- und Informationstechnik

Prof. Dr. K. Wolfrum *

30. September 2005

*Textsatz und Layout erstellt mit LaTeX

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**
1.1 Größen und Einheiten 6
1.2 SI-Einheitensystem 7

2 Messabweichungen und Fehlerrechnung **8**
2.1 Absoluter und relativer Messfehler 8
2.2 Systematische Messfehler und Fehlerfortpflanzung 9
2.2.1 Fehlerfortpflanzungsgesetz systematischer Fehler 9
2.3 Zufällige Messfehler 10
2.3.1 Fehlerfortpflanzung statistischer Fehler 13
2.3.2 Vertrauensbereich für den Schätzwert 14
2.4 Genauigkeitsklassen bei Messgeräten 16
2.5 Dynamische Messfehler 16
2.6 Messbereich, Auflösung und Messgenauigkeit 17

3 Normale und Referenzen **18**
3.1 Begriffsbestimmungen 18
3.2 Kalibrierung und Rückführung 18
3.3 Normale und Definitionen für die Elektrotechnik 20
3.3.1 Stromstärke 20
3.3.2 Spannung 20
3.3.3 Widerstand 21

4 Elektromechanische Messwerke **23**
4.1 Drehspulmesswerk 23
4.2 Elektrodynamisches Messwerk 27
4.3 Dreheisenmesswerk 28
4.4 Kreuzspulmesswerk (Drehspulquotientenmesswerk) 28
4.5 Elektrostatisches Messwerk 30
4.6 Thermische Messwerke 31
4.7 Induktionszähler 32

5 Messung bei Gleichstrom und Gleichspannung **32**
5.1 Messung von Gleichströmen 32
5.2 Messung von Gleichspannung 33
5.3 Gleichzeitige Messung von Strom und Spannung 33
5.4 Messbereichserweiterung 35
5.5 Widerstandsmessung 35
5.5.1 Direkte Messung 35
5.5.2 Messbrücken für Gleichspannung 37

6 Messung bei Wechselstrom und Wechselspannung 40
6.1 Kenngrößen . . . 40
6.2 Gleichrichtung . . . 41
6.2.1 Gleichrichtwert . . . 41
6.2.2 Scheitelwert . . . 41
6.2.3 Effektivwert . . . 43
6.3 Messwandler . . . 43
6.3.1 Spannungswandler . . . 43
6.3.2 Transformatorische Stromwandler . . . 44
6.3.3 Stromwandler mit Hallsensoren . . . 44
6.4 Messung an komplexen Widerständen . . . 49
6.4.1 Reale Induktivität . . . 49
6.4.2 Reale Kapazität . . . 50
6.4.3 3-Voltmeter-Verfahren . . . 50
6.5 Messbrücken für Wechselspannung . . . 51
6.5.1 Wien-Brücke . . . 51
6.5.2 Schering Brücke . . . 52
6.5.3 Wien-Robinson-Brücke . . . 52
6.5.4 Maxwell-Wien-Brücke . . . 53
6.6 Leistungsmessung im Wechselstromkreis . . . 55
6.7 Leistungsmessung in Drehstromsystemen . . . 56
6.7.1 Wirkleistungsmessung . . . 58
6.7.2 Blindleistungsmessung . . . 60
6.7.3 Elektronische Wirkleistungs- und Energiemessung . . . 61

7 Operationsverstärker in der Messtechnik 65
7.1 Eigenschaften von Operationsverstärkern . . . 65
7.2 Verstärkungseinstellung durch Gegenkopplung . . . 68
7.3 Interner Aufbau . . . 69
7.4 Frequenzgangkompensation . . . 72
7.5 Vergleich typischer Daten . . . 74
7.6 Nichtinvertierender Verstärker . . . 74
7.7 Invertierender Verstärker . . . 75
7.8 Umkehrsummierer . . . 77
7.9 Subtrahierer . . . 77
7.10 Instrumentenverstärker . . . 78
7.11 Umkehrintegrator . . . 79
7.12 Komparatoren und Schmitt-Trigger . . . 81
7.13 Gleichrichterschaltungen . . . 84
7.13.1 Betragsmittelwert . . . 84
7.13.2 Scheitelwert . . . 85
7.13.3 Effektivwert . . . 86
7.14 Phasenempfindlicher Gleichrichter . . . 91

7.15 Phasenschieber 92

8 Digitale Messverfahren 93
8.1 Quantisierungsfehler 93
8.2 Digital-Analog-Wandlung 95
8.2.1 Parallelverfahren 96
8.2.2 Zählverfahren 96
8.2.3 Wägeverfahren 97
8.2.4 Genauigkeit von DA-Wandlern 98
8.3 Analog-Digital-Umsetzung 99
8.3.1 Abtast-Halte-Glied (Sample & Hold) 99
8.3.2 Parallelverfahren 102
8.3.3 Zählverfahren 102
8.3.4 Wägeverfahren (Sukzessive Approximation) 106
8.3.5 Spannungs-Frequenz-Umsetzer 110
8.3.6 Taktgesteuerter Ladungskompensations-Konverter 111
8.3.7 Delta-Sigma-Verfahren 112
8.4 Frequenz- und Zeitmessung 115
8.4.1 Zeit- und Frequenznormal 115
8.4.2 Frequenzmessung 115
8.4.3 Periodendauermessung 116
8.4.4 Phasenwinkelmessung 117
8.4.5 Frequenz-Spannungs-Umsetzer 117
8.4.6 Fehler bei Frequenz- und Periodendauermessung 119

9 Das Oszilloskop 121
9.1 Analog-Oszilloskop 121
9.1.1 Funktionsblöcke 121
9.1.2 Betriebsarten und Bedienelemente 123
9.1.3 Fehlereinflüsse 127
9.2 Digitalspeicher-Oszilloskop 127
9.2.1 Funktionsblöcke 128
9.2.2 Betriebsarten 128

10 Messung nichtelektrischer Größen 132
10.1 Temperatur 132
10.1.1 Temperaturabängige Widerstände 133
10.1.2 Silizium als Kaltleiter 134
10.1.3 Heissleiter 134
10.1.4 Flussspannung eines pn-Übergangs 135
10.1.5 Thermoelement 136
10.2 Luftfeuchtigkeit 138

1 Einleitung

Aufgabe der Messtechnik ist die hinreichend genaue, quantitative, d. h. zahlenmäßige Erfassung von physikalischen Größen. Beim Vorgang des Messens wird eine Messgröße in einen Messwert umgewandelt. Hierzu bedient man sich geeigneter technischer Einrichtungen, die in Form der sogenannten Messkette (Abbildung 1) hintereinander geschaltet sind. Grundsätzlich können die Messverfahren unterteilt werden in

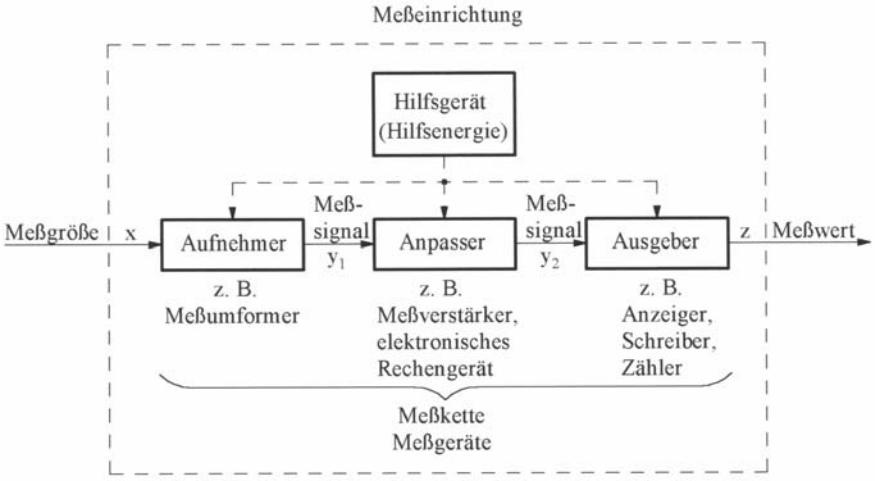

Abbildung 1: Messvorgang zerlegt in Messkette

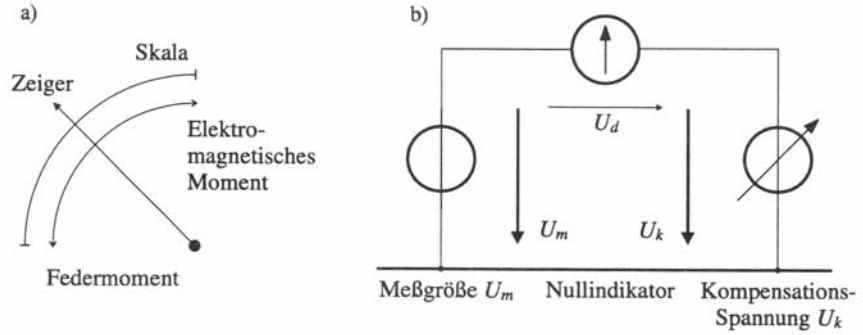

Abbildung 2: a) Ausschlagsverfahren, b) Kompensationsverfahren

Ausschlagsverfahren und Kompensationsverfahren (Abbildung 2). Beim Ausschlagsverfahren verursacht die Messgröße einen Zeigerausschlag, mit Hilfe dessen auf einer entsprechenden Skala der Messwert abgelesen werden kann. Dahingegen arbeiten Kompensationsverfahren ohne Ausschlag. Das zum Abgleich notwendige Messinstrument wird lediglich als Nullindikator benutzt, d. h. die Messgröße wird durch eine

Hilfsgröße so kompensiert, dass der Nullindikator in seiner Ruhestellung steht. Die Hilfsgröße ist dann gleich der Messgröße.

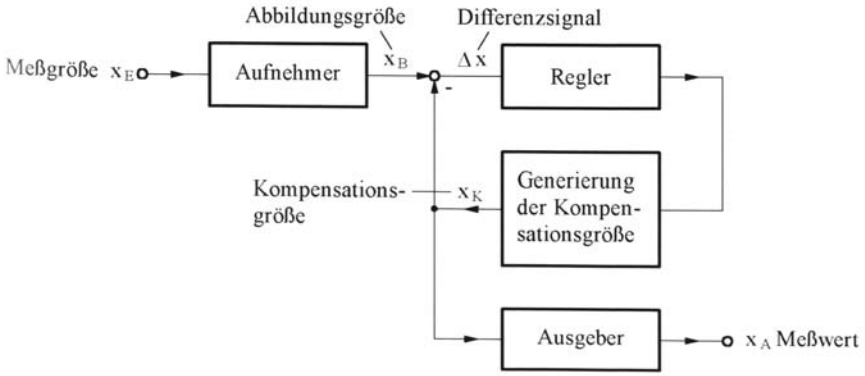

Abbildung 3: Wirkprinzip des Kompensationsverfahrens

Naturgemäß sind Ausschlagsverfahren einfacher in der Handhabung. Für höchste Genauigkeit sind jedoch Kompensationsverfahren vorzuziehen.

1.1 Größen und Einheiten

Zur Angabe und zum Vergleich gemessener Größen ist ein einheitliches Maßsystem notwendig. Messgrößen können durch mathematische Ausdrücke angegeben werden, wobei der Wert der Größe in der Regel durch das Produkt aus Zahlenwert der Messgröße und Einheit der Messgröße dargestellt wird:

$$\boxed{\text{Wert der Größe} = \text{Zahlenwert} \times \text{Einheit}}$$

Will man die Einheit einer Messgröße explizit angeben, so wird dazu der Operator $[\,]$ angewendet, zur Angabe des Zahlenwerts dient der Operator $\{\}$. Ein kleines Beispiel soll dies verdeutlichen:

$$\begin{aligned} \text{Messgröße} \quad U &= 12\,\text{V} \\ \text{Einheit} \quad [U] &= \text{V} \\ \text{Zahlenwert} \quad \{U\} &= 12 \\ \text{formal} \quad U &= \{U\} \cdot [U] \end{aligned} \tag{1}$$

Soll z. B. in einer Tabelle oder bei einer Achsbeschriftung lediglich der Zahlenwert der Messgröße angegeben werden, so lautet die korrekte Spaltenüberschrift bzw. Achsbezeichnung für das obige Beispiel U/V. Die Messgröße wird durch die Einheit dividiert, so dass lediglich der Zahlenwert übrig bleibt.

Tabelle 1: Basisgrößen und Einheiten des SI-Systems

Basisgröße	Formelzeichen	Einheitenzeichen	Basiseinheit
Länge	l	m	Meter
Zeit	t	s	Sekunde
Masse	m	kg	Kilogramm
Temperatur	T	K	Kelvin
Stromstärke	I	A	Ampère
Stoffmenge	n	mol	Mol
Lichtstärke	I_v	cd	Candela

1.2 SI-Einheitensystem

Grundsätzlich können die Einheiten willkürlich gewählt werden. Daher gab (und gibt es zum Teil noch) unterschiedliche Einheitensysteme, die jeweils nur regionale oder nationale Bedeutung hatten. Im Sinne einer weltweiten Vereinheitlichung und zur Darstellbarkeit der Einheiten wurde versucht, die Einheiten weitestgehend auf atomare Größen zurückzuführen.

Am Beispiel der Festlegung der Längeneinheit wird der Vorteil deutlich. Das sogenannte „Urmeter“, ein in Paris aufbewahrter Stab aus einer speziellen Legierung verkörperte die Länge der Größe $l = 1$ m. Im Rahmen des SI[1]-Einheitensystems ist die Meterdefinition durch die Strecke festgelegt, die Licht in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Dadurch ist die Länge eines Meters an jedem beliebigen Ort darstellbar, wo die entsprechende Versuchsanordnung verfügbar ist. Eine Reise zum Lagerort des Urmeters erübrigt sich damit.

Im SI-System werden alle Größen auf sieben sogenannte Basisgrößen zurückgeführt, die in Tabelle 1 aufgeführt sind.

Durch Kombination, d. h. Multiplikation oder Division der Basiseinheiten erhält man die sogenannten abgeleiteten Einheiten. Für den praktischen Gebrauch wurden für häufig benötigte abgeleiteten Einheiten besondere Namen eingeführt. Damit kann z. B. die Einheit der abeleiteten Größe der elektrischen Spannung U wesentlich kürzer schreiben: $[U] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A\,s^3}} = V$. Die Namen für abgeleite Einheiten sind häufig von Namen von Naturwissenschaftlern abgeleitet, die sich mit der Erforschung der mit den Einheiten zusammenhängenden Gesetzmäßigkeiten beschäftigt haben.[2]

Leider gibt es bei den Namen für abgeleteite Einheiten wieder manche nationale Besonderheiten. So ist z. B. in der angelsächsischen Welt die abgeleite Einheit Siemens (S) für den Leitwert G weitgehend unbekannt. Der Leitwert wird dort meist in der

[1] Système International d'Unités
[2] Kurze Biographien und Anekdoten zu den Namensgebern sind zu finden in [8]

Tabelle 2: Festlegung der SI-Basisgrößen

Basisgröße	definiert durch
Länge	Lichtgeschwindigkeit und Zeit
Zeit	Periodendauer eines atomaren Strahlungsübergangs
Masse	Prototyp („Ur-Kilogramm“)
Temperatur	Tripelpunkt von Wasser
Stromstärke	Kraft zwischen parallelen, stromdurchflossenen Leitern
Stoffmenge	Zahl der Atome des Isotops ^{12}C in 12 g
Lichtstärke	Photometrisches Strahlungsäquivalent

Einheit mho $= \frac{1}{\Omega}$ angegeben (Ohm rückwärts). [3]

2 Messabweichungen und Fehlerrechnung

2.1 Absoluter und relativer Messfehler

Alle Messungen sind mit Fehlern behaftet, d. h. der vom Messgerät angezeigte Wert A weicht vom wahren Wert W der Messgröße ab. Die Abweichung wird als absoluter Fehler F bezeichnet:

$$F = A - W \tag{2}$$

Bezieht man den Fehler auf den wahren Wert, so erhält man den relativen Fehler f, der häufig in Prozent, bei sehr kleinen Fehlern auch in ppm[4] angegeben wird:

$$\text{relativer Fehler} \quad f = \frac{F}{W} \cdot 100\% \tag{3}$$

Das Problem der Definitionsgleichung 3 liegt darin, dass der wahre Wert W bei einer Messung nicht bekannt ist. Da aber bei allen vernünftig durchgeführten Messungen der Ablesewert A dem wahren Wert W sehr nahe kommt, ist die folgende Näherung erlaubt:

$$\text{relativer Fehler} \quad f \approx \frac{F}{A} \cdot 100\% \tag{4}$$

Zum Vergleich von Messgeräten wird als Bezugsgröße nicht der Anzeigewert sondern die Messspanne Msp des Geräts verwendet, d. h. die Differenz zwischen Messbereichsendwert (Skalenendwert) und Messbereichsanfangswert (Skalenanfangswert):

$$\text{normierter/reduzierter Fehler} \quad \overline{f} \approx \frac{F}{Msp} \cdot 100\% \tag{5}$$

[3] Solche und andere „exotische“ Einheiten finden sich in [9]

[4] parts per million, 10^{-6}

2.2 Systematische Messfehler und Fehlerfortpflanzung

Systematische Fehler treten durch Unzulänglichkeiten des Messsystems auf. Bei genauer Kenntnis der Eigenschaften des Messobjekts und des Messsystems lassen sich die systematischen Fehler berechnen und der Ablesewert kann entsprechend korrigiert werden.

Beispiel: Die Quellenspannung einer hochohmigen Spannungsquelle soll gemessen werden, es steht jedoch nur ein relativ niederohmiges Voltmeter zur Verfügung. Bei Kenntnis der Innenwiderstände kann der Anzeigewert entsprechend korrigiert und somit der systematische Fehler herausgerechnet werden.

2.2.1 Fehlerfortpflanzungsgesetz systematischer Fehler

In vielen Fällen benötigt man mehrere Messwerte, um daraus die gesuchte Größe rechnerisch zu bestimmen. Zur Bestimmung der elektrischen Leistung P ist z. B. sowohl eine Strom- als auch eine Spannungsmessung mit den jeweils zugehörigen Fehlern notwendig, damit $P = U \cdot I$ berechnet werden kann. Allgemein ist die gesuchte Größe y mit den Messgrößen $x_i (i = 1 \ldots n)$ durch die Funktion f verknüpft:

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{6}$$

Mit dem wahren Wert y_w ergibt sich aus den absoluten Einzelmessfehlern Δx_i der absolute Messfehler Δy

$$\Delta y = y - y_w = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) \tag{7}$$

Für $\Delta x_i \ll x_i$ kann f in eine Taylorreihe entwickelt werden, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \tag{8}$$

Häufig kann die funktionale Abhängigkeit nach Gleichung 6 als Produkt von Potenzen der Messgrößen geschrieben werden:

$$y = k \cdot x_1^{r1} \cdot x_2^{r2} \cdots x_n^{rn} \tag{9}$$

Dann lassen sich der absolute und der relative Fehler nach Gleichung 8 schreiben als

$$\text{absoluter Fehler} \quad \Delta y = y \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\Delta x_i}{x_i}. \tag{10}$$

$$\text{relativer Fehler} \quad \frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i. \tag{11}$$

Der relative Fehler des errechneten Messergebnisses ist daher gleich der Summe der relativen Fehler f_i, die mit den jeweiligen Exponenten r_i gewichtet werden.

2.3 Zufällige Messfehler

Im Gegensatz zu den zumindest prinzipiell vermeidbaren systematischen Messfehlern, sind zufällige, nicht reproduzierbare Messfehler grundsätzlich unvermeidbar. Wird eine sehr große Anzahl N von Messwerten x_i aufgenommen, so streuen die Messwerte um den arithmetischen Mittelwert μ, der auch als Erwartungswert x_w bezeichnet wird. Die Häufigkeit, mit der ein bestimmter Messwert x_i auftritt, wird durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ beschrieben. Im Idealfall rein statistischer Fehler kann $p(x)$ durch die sogenannte Normalverteilung oder Gaußverteilung beschrieben werden.

Normalverteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{12}$$

arithmetischer Mittelwert, Erwartungswert

$$x_w = \mu = \lim_{N\to\infty} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{13}$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2} \tag{14}$$

Für die Bewertung von Messreihen möchte man wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit P ein Messwert x_i in einem bestimmten Intervall $x_1 \le x \le x_2$ auftritt. Diese Wahrscheinlichkeit P erhält man durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ über das betrachtete Intervall:

Wahrscheinlichkeit

$$P = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \tag{15}$$

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \tag{16}$$

Das in Gleichung 16 auftretende Integral der Form $\int e^{kx^2}dx$ ist analytisch nicht lösbar.

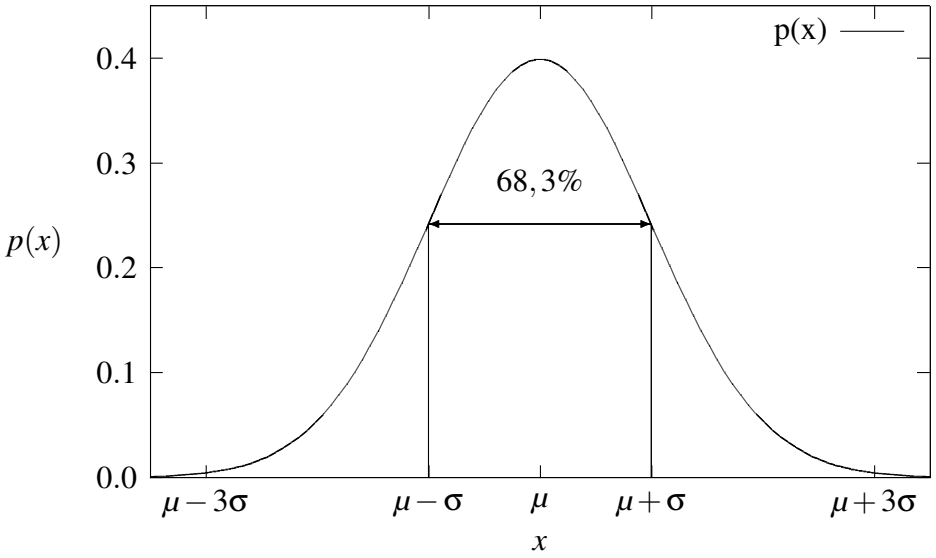

Abbildung 4: Gauß'sche Normalverteilung

Zur Rechenerleichterung wurde daher die sogenannte Errorfunction erf(w) definiert[5].

$$\text{Errorfunction erf}(w)$$
$$\text{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-x^2} dx \tag{17}$$

Mit Hilfe der Substitution $c = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ kann Gleichung 16 auf der vorherigen Seite umgeformt werden zu:

$$P = \frac{1}{2}\left[\text{erf}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{18}$$

Für die Wahrscheinlichkeit bzw. statistische Sicherheit, mit der ein Messwert x_i im Intervall $\mu - \delta \leq x \leq \mu + \delta$ liegt, erhält man schließlich mit Hilfe der Gleichungen 15-18

$$P(\delta) = \text{erf}\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) \tag{19}$$

Sind keine systematischen Fehler vorhanden (oder systematische Fehler vollständig korrigiert), dann liegt ein Messwert x_i mit der Wahrscheinlichkeit $P(\delta)$ innerhalb des Intervalls $\mu - \delta \leq x \leq \mu + \delta$. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Messwerts im Intervall $\pm\sigma$ um den Erwartungswert μ herum, d. h. für $\delta = \sigma$, beträgt 68,3 % (nach Gleichung 19 und der graphischen Auftragung in Abbildung 5). Für das Intervall $\pm 2\sigma$

[5] Die Errorfunction ist tabelliert in dem Standardwerk [10]

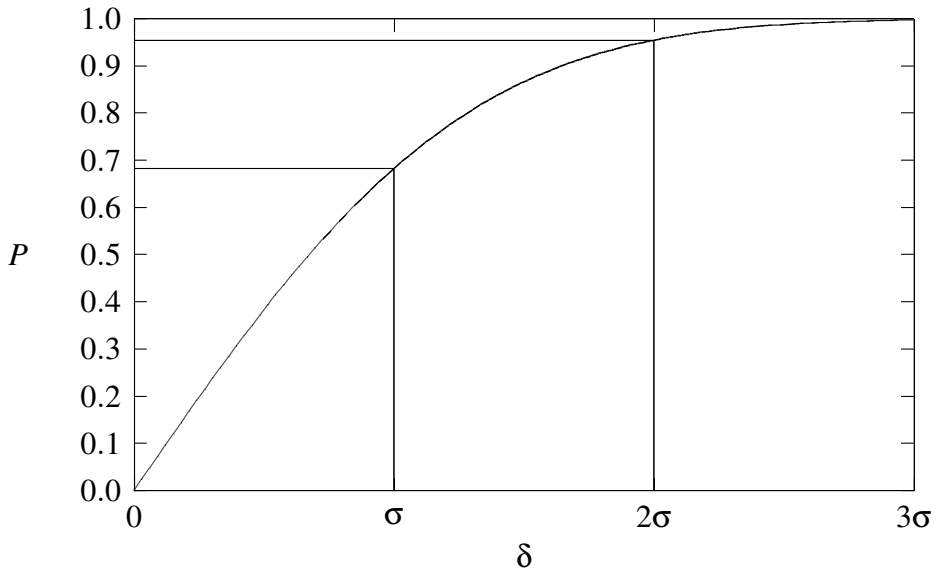

Abbildung 5: Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Messwerts

Tabelle 3: Statistische Sicherheit P bei symmetrischem Intervall $\mu - \delta \leq x \leq \mu + \delta$

δ	$P(\delta)$ in %
$0,50\,\sigma$	38,3
$0,67\,\sigma$	50,0
$1,00\,\sigma$	68,3
$1,65\,\sigma$	90,0
$1,96\,\sigma$	95,0
$3,00\,\sigma$	99,7
$3,30\,\sigma$	99,9

beträgt die Wahrscheinlichkeit bereits 95 % und für $\pm 3\sigma$ erhält man die Wahrscheinlichkeit von 99,73 %. Einige Werte sind zur Verdeutlichung zusätzlich in Tabelle 3 aufgeführt. Der Koeffizient von σ in Tabelle 3 wird als Vertrauensfaktor t bezeichnet:

$$\delta = t\,\sigma \tag{20}$$

Die in der Tabelle 3 aufgeführten Vertrauensfaktoren gelten für den Grenzfall unendlich vieler Messwerte. Ebenso gelten die Gleichungen 12-14 nur für $N \to \infty$ In der Realität hat man aber immer eine nur eine endliche Anzahl. Diese Anzahl N von Messwerten x_i wird als Stichprobe der Grundgesamtheit der theoretisch unendlich vielen Messungen betrachtet. Aus dieser Stichprobe kann unter sinngemäßer Anwendung von Gleichung 13 auf Seite 10 ein Schätzwert $\tilde{x}$ sowie die Schwankung s (empirische

Standardabweichung) berechnet werden:

$$\tilde{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{Schätzwert} \tag{21}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\tilde{x})^2} \quad \text{empirische Standardabweichung} \tag{22}$$

Gegenüber der Definition der Standardabweichung σ gemäß Gleichung 14 auf Seite 10 ist zu beachten, dass bei der empirischen Standardabweichung durch $N-1$ dividiert wird. Für hinreichend große N spielt dieser kleine Unterschied allerdings keine Rolle mehr.

2.3.1 Fehlerfortpflanzung statistischer Fehler

Während das Vorzeichen eines systematischen Fehlers während einer Messreihe in der Regel festliegt, ändert sich das Vorzeichen statistischer Fehler im Lauf der Messung ständig, so dass positive und negative Abweichungen vom wahren Wert auftreten. Sind die Messwerte ideal normal verteilt wie dies durch Gleichung 12 und Abbildung 4 auf Seite 11 beschrieben wird, so ergibt die Summe positiver und negativer Abweichungen einen verschwindenden Wert.

Anschaulich können die statistischen Messabweichungen als unkorrelierte Wechselspannungsgrößen betrachtet werden, die wegen ständig fluktuierender Phasenlage und Frequenz im Prinzip wie Rauschsignale behandelt werden können. Die Überlagerung von Rauschsignalen erfolgt nicht vektoriell im Zeigerdiagramm sondern als Addition von Rauschleistungen. Entgegen der linearen Addition nach Gleichung 8 auf Seite 9 muss daher eine geometrische Addition durchgeführt werden. Läßt sich die gesuchte Messgröße y durch $y = f(x_1,\ldots,x_n)$ aus den Einzelmessgrößen $x_1,\ldots,x_n$ bestimmen, so kann der Mittelwert y_w aus den Mittelwerten $\overline{x_i}$ der Messgrößen x_i gemäß $y_w = f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$bestimmt werden.

Grundsätzlich wird nun Gleichung 8 angewendet, wobei aber beide Seiten quadriert werden. Nimmt man an, dass sich bei perfekt unkorrelierten Daten die gemischten Terme auf der rechten Seite herausheben, so erhält man das sogenannte Gauß'sche Fehlerfortpflanzugsgesetz und die Standardabweichung σ_y des errechneten Mittelwertes y_w ergibt sich zu:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2} \tag{23}$$

Läßt sich die gesuchte Große y als Produkt von Potenzen folgendermaßen schreiben,

$$y_w = k\, x_1^{r1} \ldots x_n^{r2} \tag{24}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = r_i \frac{y_w}{x_i} \tag{25}$$

so ergibt sich für die relative Standardabweichung $\frac{\sigma_y}{y_w}$:

$$\frac{\sigma_y}{y_w} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(r_i \frac{{\sigma_i}^2}{x_i} \right)} \tag{26}$$

Es werden also die mit dem jeweiligen Exponenten gewichteten, relativen Standardabweichungen σ_i/x_i geometrisch zur relativen Standardabweichung des berechneten Werts y_w aufsummiert.

Die durchgeführten Betrachtungen zur Fehlerfortpflanzung können auch auf Schätzwerte aus einer endlichen Stichprobe angewendet werden, wenn die zugehörigen Schwankungen nicht zu groß sind. Als Schwankung des Schätzwertes erhält man dann:

$$\sigma_{\overline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2} \tag{27}$$

s_i sind hierbei die Schwankungen der in die Berechnung eingehenden Schätzwerte.

2.3.2 Vertrauensbereich für den Schätzwert

Wird aus einer endlichen Stichprobe ein Schätzwert ermittelt, so kann dessen Vertrauenswürdigkeit bzw. Güte nur durch statistische Kenngrößen bestimmt werden. Insbesondere muss bestimmt werden, wie nahe der Schätzwert dem wahren Wert liegt. Meist ist es ausreichend zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Schätzwert in einem bestimmten Intervall um den wahren Wert herum liegt. Daher kommt der Betrachtung der statistischen Kenngrößen eine besondere Bedeutung zu.

Aus einer Grundgesamtheit von unendlich vielen Messwerten x_i sollen N Schätzwerte $\tilde{x}_i$ ermittelt werden, die wiederum aus N Einzelmessungen berrechnet wurden. Aus den N Schätzwerten ergibt sich der Mittelwert $\overline{x}$ zu

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \tag{28}$$

Die Verteilung der Schätzwerte $\tilde{x}_i$ weist eine Verteilung auf, deren Schwankung aus dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz (Gleichung 23 auf der vorherigen Seite)

berechnet werden kann:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 s_i^2} \tag{29}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \right) = \frac{1}{N} \tag{30}$$

$$\text{folgt} \quad s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i^2} \tag{31}$$

Für hinreichend große Losgrößen nähern sich alle s_i einem gemeinsamen Wert an, es gilt $s_i \approx s$ und Gleichung 31 läßt sich vereinfachen zu

$$s_{\tilde{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{32}$$

Bei Ermittlung von N Schätzwerten reduziert sich daher die Schwankung der Schätzwertverteilung auf das $\frac{1}{\sqrt{N}}$-fache gegenüber der Schwankung des Einzelwertes.

Das Ergebnis einer Messung wird daher stets als Schätzwert plus/minus Vertrauensbereich V angegeben:

$$V = \frac{t\, s}{\sqrt{N}} \tag{33}$$

$$x = \tilde{x} \pm V = \tilde{x} \pm \frac{t\, s}{\sqrt{N}} \tag{34}$$

Der in Gleichung 34 auftretende Parameter t hängt von der Stichprobengröße N sowie von der geforderten Wahrscheinlichkeit P ab. Im Falle $N \to \infty$ ergibt sich t aus Tabelle 3 auf Seite 12. Für endliche Stichproben ist der Wert von t größer und wird mit Hilfe der sogenannten Studentschen t-Verteilung berechnet (vgl. Tabelle 4).

N	t für $P = 50\%$	t für $P = 90\%$	t für $P = 95\%$	t für $P = 99\%$
2	1,0	6,314	12,706	63,657
3	0,816	2,920	4,303	9,925
10	0,703	1,833	2,262	3,250
30	0,683	1,699	2,045	2,756
120	0,677	1,658	1,980	2,617
∞	0.674	1,645	1,960	2,576

Tabelle 4: Parameter t in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit P und der Stichprobengröße n (nach Tabelle 26.10 in [10]).

Die Werte der Tabelle 4 gelten für normal verteilte Meßwerte, d. h. die Messwerte streuen gemäß einer Gauß'schen Normalverteilung um ihren Mittelwert. Für eine unendlich große Stichprobe ($N \to \infty$) ist $t = 1$ für $P = 63\%$, Für $P = 95\%$ ergibt sich

$t \approx 2$ (Tabelle 3). Bei Stichprobengrößen $N < 30$ hängt t sehr stark von n ab. Für große N, d. h. $n \gg 30$ ist $t \approx$ const., und es gilt $V \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$. Zur Halbierung der Breite des Vertrauensbereichs muß daher die Stichprobengröße vervierfacht werden!

2.4 Genauigkeitsklassen bei Messgeräten

Standardmessgeräte werden üblicherweise in Genauigkeitsklassen unterteilt, wodurch eine obere Fehlergrenze garantiert wird. Die Genauigkeitsklasse G gibt den prozentualen Betrag der maximalen Messabweichung Δx bezogen auf den Skalenendwert x_{end} an:

$$G = \left| \frac{\Delta x}{x_{end}} \right| 100\% \tag{35}$$

Der tatsächliche maximale relative Fehler hängt davon ab, wie gut der Messbereich ausgenutzt wird:

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{x_{end}}{x} \frac{G}{100\%} \tag{36}$$

Je kleiner der Anzeigewert x, desto größer ist der relative Fehler. Es sollte daher die verfügbare Messspanne möglichst gut ausgenutzt werden.

Die folgenden Genauigkeitsklassen sind üblich:

- Betriebsmessgeräte: 1, 1,5, 2,5, 5,0
- Feinmessgeräte: 0,05, 0,1, 0,2, 0,5

Die angegebene Genauigkeitsklasse wird jedoch nur dann eingehalten, wenn das Messgerät im Rahmen seiner vom Hersteller spezifizierten Bedingungen betrieben wird.

2.5 Dynamische Messfehler

Bisher wurden nur statische Fehler behandelt, d. h. das Einschwingverhalten des Messsystems blieb unberücksichtigt. Diese Vereinfachung ist bei der Erfassung konstanter oder äußerst langsam veränderlicher Größen zulässig. Bei schneller veränderlichen Größen muss die Trägheit des Messsystems berücksichtigt werden. Der angezeigte Wert $x(t)$ weicht vom wahren Wert $x_w(t)$ ab. Der **momentane dynamische Messfehler** $F_{dyn}(t)$ ist definiert als

$$F_{dyn}(t) = x(t) - x_w(t) \tag{37}$$

Als Qualitätskriterium praktischer ist nicht der Momentantwert des dynamischen Fehlers sondern dessen zeitlicher Mittelwert über eine gewisse Zeitspanne T. Wegen des

möglichen oszillierenden Verhaltens des dynamischen Fehlers wird als Kenngröße der **mittlere quadratische dynamische Fehler** definiert:

$$\overline{F_{dyn}^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - x_w(t))^2 \, dt \tag{38}$$

Sinnvoll ist es, den Absolutwert $\overline{F_{dyn}^2}$ auf den quadratischen Mittelwert $\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt$ des angezeigten Wertes $x(t)$ zu beziehen. Für den **quadratischen Mittelwert des dynamischen Fehlers** ergibt sich somit $\overline{f_{dyn}^2} = \frac{\overline{F_{dyn}^2}}{\overline{x^2}}$.

Tiefpass 1. Ordnung Im einfachsten Fall verhält sich das Messsystem wie ein Tiefpass 1. Ordnung mit der charakteristischen Zeitkonstanten τ. Der angezeigte Wert x nähert sich nach Sprunganregung mit $x_w(t \geq 0) = x_0$ gemäß der bekannten Funktion $x(t) = x_0 \, (1 - e^{-t/\tau})$, wobei τ die Zeitkonstante des Messsystems ist. Für $t \gg \tau$ ist die dynamische Messabweichung zu vernachlässigen. Für beliebige Zeiten t gilt $x(t) \leq x_0$, d. h. ein Überschwingen findet bei einem System 1. Ordnung nicht statt.

Systeme höherer Ordnung Bei Systemen mindestens 2. Ordnung ist ein Überschwingen möglich, d. h. $x(t)$ kann nach einer Sprunganregung mit $x_w(t \geq 0) = x_0$ auch über x_0 hinausschwingen. Das Einschwingverhalten hängt unter anderem von der Dämpfung des Systems ab. Am Beispiel des Drehspulmesswerks wird das Einschwingverhalten in Abschnitt 4.1 näher untersucht.

2.6 Messbereich, Auflösung und Messgenauigkeit

Messbereich Der Messbereich eines Messsystems gibt den Bereich der Eingangsgröße an, in dem die angegebene Fehlergrenze nicht überschritten wird. Unter Umständen kann der Anzeigebereich größer sein als der Messbereich.

Auflösung Die Auflösung bzw. das Auflösungsvermögen stellt die kleinste nachweisbare Änderung der Eingangsgröße dar. Bei Messsystemen mit Digitalanzeige entspricht die Auflösung dem Wert der niedrigstwertigen Anzeigestelle („digit“). Bei Analoginstrumenten ist das Auflösevermögen durch die kleinste noch unterscheidbare Zeigerstellungsänderung bestimmt.

Messgenauigkeit Der Begriff Messgenauigkeit wird häufig sehr unterschiedlich verwendet. Es sollte besser von Messunsicherheit bzw. Messabweichung gesprochen werden. Auf keinen Fall darf die Messunsicherheit mit der Auflösung gleichgesetzt werden. Insbesondere bei digital anzeigenden Instrumenten ist die Versuchung sehr groß, alle angezeigten Stellen für signifikant anzusehen.

3 Normale und Referenzen

3.1 Begriffsbestimmungen

Für einen einheitlichen Sprachgebrauch sollen einige wichtige Begriffe der Messtechnik kurz definiert werden.

- Metrologie
  Wissenschaft vom Messen.
- Messen
  Quantitative Ermittlung des Wertes einer physikalischen Größe durch Vergleich mit einer Maßverkörperung.
- Normal
  Maßverkörperung oder Darstellung einer physikalisch-technischen Einheit.
- Eichen
  Nach gesetzlichen Bestimmungen von einer staatlichen Eichbehörde vorgenommene Prüfung und Bestätigung.
- Kalibrieren
  Feststellen des für ein Messsystem gültigen Zusammenhangs zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße.
- Rückführen
  Bezug von Messergebnissen durch eine ununterbrochene Kette von Kalibrierungen auf nationale Normale.
- Justieren
  Einstellen eines Messsystems, um Messabweichungen auf die geforderten Werte zu bringen.
- Graduieren
  Aufbringen und Teilung einer Skala

3.2 Kalibrierung und Rückführung

Die internationale Vergleichbarkeit von Messwerten ist grundsätzlich durch die Rückführung auf die SI-Basisgrößen gemäß Tabelle 2 auf Seite 8 gewährleistet. Zu diesem Zweck werden von den zuständigen nationalen Einrichtungen sogenannte nationale Normale bereit gehalten, die die Einheiten mit der jeweils größtmöglichen Genauigkeit darstellen. Die Größe dieser Normale wiederum muss zurückgeführt werden auf

die zu Grunde liegenden SI-Basisgrößen. Die festgelegten Definitionen werden wegen des enormen Aufwands in der Regel nur bei staatlichen Einrichtungen angewandt.

Saatliche Oberbehörden sind zum Beispiel:

- Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Deutschland
- National Institute of Standards & Technology (NIST, USA)
  früherer Name (bis 1988) National Bureau of Standards (NBS)

Für die industrielle Messtechnik in Deutschland ist der Deutsche Kalibrierdienst (DKD) zuständig, der der PTB angegliedert ist[6].

Ausgehend von den nationalen Normalen werden Bezugsnormale und Gebrauchsnormale erstellt, wodurch eine in Abbildung 6 veranschaulichte Kalibrier-Hierarchie mit von Schritt zu Schritt zunehmender Messunsicherheit entsteht [7].

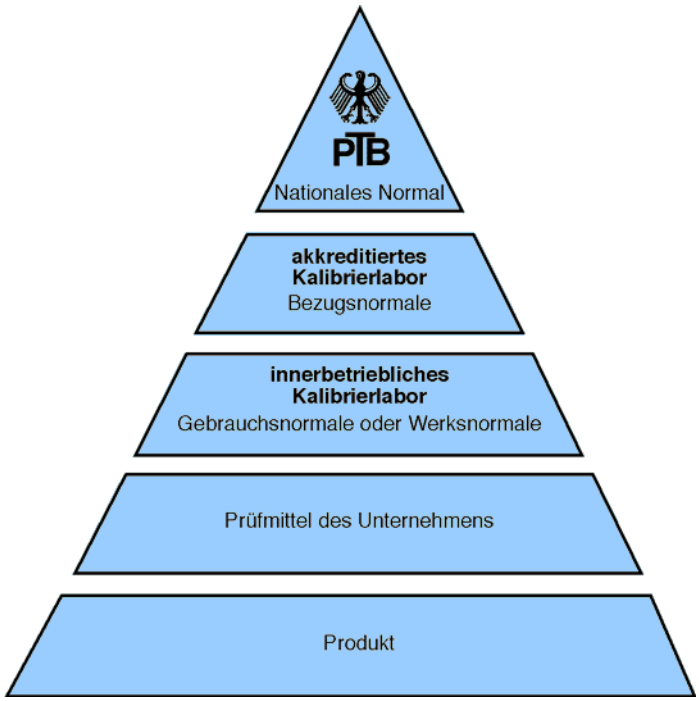

Abbildung 6: Kalibrier-Hierarchie

[6] www.dkd.info
[7] http://www.ptb.de/de/wegweiser/industriekunden/_kalibrierung.html

3.3 Normale und Definitionen für die Elektrotechnik

3.3.1 Stromstärke

Die Stromstärke ist als SI-Basiseinheit folgendermaßen definiert:
Ein Ampère ist die elektrische Stromstärke, die durch zwei parallele im Abstand von einem Meter im Vakuum angeordnete, geradlinige, unendlich lange Linienleiter fließen muss, damit dadurch zwischen ihnen auf je einem Meter Leiterlänge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N *hervorgerufen wird. Ein Ampère entspricht einem Fluss von* $6,24150948(54) \cdot 10^{18}$ *Elementarladungen e pro Sekunde durch den Leiterquerschnitt.*

Diese Definition ist für eine praktische Durchführung nicht besonders gut geeignet. Tatsächlich wird eine indirekte Methode benutzt und man realisiert das Ampère über den Quotienten aus Spannung und Widerstand[8]. Das Volt wird mit einer Spannungswaage realisiert: Auf den einen Balken der Waage wirkt eine unbekannte elektrostatische Kraft. Sie wird mit der Kraft auf bekannte Gewichtsstücke verglichen. Das Ohm wird von einem berechenbaren Kondensator abgeleitet.

3.3.2 Spannung

Die elektrische Spannung ist eine abgeleitete Größe, die herkömmlich durch die in einem Leiter bei einem bestimmten Stromfluss umgesetzte Leistung definiert wurde:
Ein Volt ist gleich der elektrischen Spannung zwischen zwei Punkten eines homogenen, gleichmäßig temperierten Linienleiters, in dem bei einem stationären Strom von einem Ampere zwischen diesen beiden Punkten die Leistung ein Watt umgesetzt wird.

Josephson-Effekt Wesentlich genauer ist die Rückführung auf den Josephson-Effekt[9], der bei zwei, durch eine wenige Nanometer dünne Isolierschicht getrennten Supraleiter autritt. Wird auf ein solches Josephson-Element eine Frequenz im Mikrowellenbereich eingestrahlt, liegen zwischen den beiden Supraleitern diskrete Spannungswerte an, die nur von dem Quotienten zweier Naturkonstanten und der Frequenz f der Mikrowelle abhängen. In der Kennlinie treten diese Stufen konstanter Spannung U_n bei folgenden Werten auf:

$$U_n = n \cdot \frac{h}{2\,e} \cdot f = \frac{1}{K_J} \cdot f \tag{39}$$

$$\text{mit} \quad K_J = 483597,9 \frac{\text{GHz}}{V} \quad \text{Josephson-Konstante} \tag{40}$$

Bei einer Frequenz $f = 72,5$ GHz beträgt der Abstand zweier Spannungsstufen 150 μV. Durch Hintereinanderschalten vieler Josephson-Elemente können Spannun-

[8] http://www.ptb.de/de/wegweiser/einheiten/si/ampere.html
[9] http://www.ptb.de/de/org/2/Inhalte/Josephson/josephson.htm

gen im Volt-Bereich mit einer relativen Unsicherheit von 10^{-10}, entsprechend 1 nV bei 10 V dargestellt werden.

Weston-Normalelement Als transportables Normal dient das Weston-Normalelement[10] mit einer Quellenspannung $U_W = 1,01865$ V bei $\vartheta = 20°\text{C}$.

Das Element darf nur mit Strömen $< 10\,\mu$A belastet werden und wird daher vorzugsweise in Kompensationsschaltungen verwendet, die praktisch stromlos arbeiten. Im Umgebungstemperaturbereich $15°\text{C} < \vartheta < 25°\text{C}$ beträgt die Temperaturabhängigkeit der Elementspannung

$$U_t = U_{20} - \left[39,8 \cdot (\vartheta - 20°\text{C}) + 0,93 \cdot (\vartheta - 20°\text{C})^2 - 0,009 \cdot (\vartheta - 20°\text{C})^3\right] \cdot 10^{-6}\,\text{V} \tag{41}$$

3.3.3 Widerstand

Widerstandsnormale bzw. Referenzwiderstände für Gleichstrom werden als Drahtwiderstände ausgeführt, wobei das Leitermaterial einen geringen Temperaturkoeffizient haben muss. Verwendet wird in der Regel Manganin, eine Legierung aus Nickel, Mangan und Kupfer mit einem Temperaturkoeffizienten von $25 \cdot 10^{-6}/\,\text{K}$. Das 1 Ω Primärnormal ist mit einer Abweichung kleiner als $\pm 10^{-6}$ darstellbar.

Abbildung 7: Widerstandsnormale

[10] http://www.ptb.de/de/org/q/q3/q31/tr/tre24.pdf

Die verwendeten Widerstandsnormale können mit Hilfe des Quanten-Hall-Effekts überprüft werden. Damit ist der Widerstand rückführbar auf Naturkonstanten. 1980 untersuchte der deutsche Physiker Klaus von Klitzing die Hall-Spannung an MOS-Feldeffekttransistoren bei tiefen Temperaturen und in hohen Magnetfeldern. Der Hall-Widerstand, der Quotient aus Hall-Spannung und Probenstrom, betrug Bruchteile von h/e^2. Besonders ausgeprägt waren die Werte, wenn die Konstante h/e^2 durch z. B. 2 oder durch 4 dividiert wurde, also bei 12906 Ω und bei 6453 Ω [11].

[11] http://www.ptb.de/de/org/2/Inhalte/qhe/_quantenhalleffekt.htm

4 Elektromechanische Messwerke

Analog anzeigende, elektromechanische Messgeräte werden in vielen Bereichen nach wie vor eingesetzt. Da außerdem die in diesen Messwerken verwendeten physikalischen Wandlungsprinzipien von grundlegender Bedeutung sind, soll die Funktionsweise der wichtigsten Messwerke beschrieben werden.

4.1 Drehspulmesswerk

Das am weitesten verbreitete elektromechanische Messwerk war und ist das Drehspulmesswerk. Die Funktion beruht auf der Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im äußeren konstanten Magnetfeld.

Befindet sich ein vom Strom I durchflossener Leiter der Länge l in einem Magnetfeld $\vec{B}$, so wirkt auf den Leiter die Kraft $\vec{F}$:

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B}) \tag{42}$$

Die Anordnung von Leiter und Magnetfeld ist in Abbildung 8 dargestellt, den Prinzipaufbau des Drehspulmesswerks zeigt Abbildung 9 auf der nächsten Seite. Der strom-

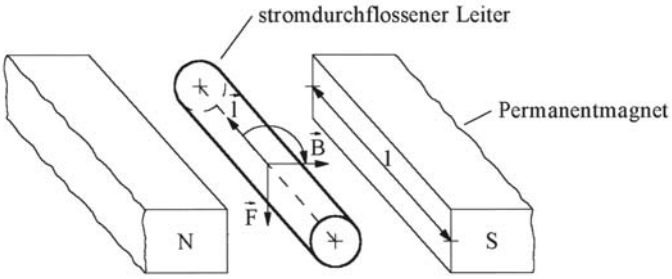

Abbildung 8: Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

durchflossene Leiter wird zu einer drehbar gelagerten Spule mit N Windungen aufgewickelt, die einen rechteckigen Querschnitt aufweist. Das Magnetfeld wird von einem Permanentmagneten erzeugt, die Feldlinien werden durch geeignet geformte Polschuhe und einen Weicheisenzylinder in der Drehspule so geleitet, dass sich im Luftspalt ein radialsymmetrisches Magnetfeld ergibt. Mit den geometrischen Daten aus Abbildung 9 auf der nächsten Seite ergibt sich für das auf die Drehspule wirkende elektromagnetische Drehmoment $\vec{M}_{em}$:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{em} &= 2N\vec{r} \times \vec{F} \\ &= 2N\vec{r} \times \left[I(\vec{l} \times \vec{B})\right] \\ &= 2\,N\,r\,I\,l\,B\,\vec{e}_a \end{aligned} \tag{43}$$

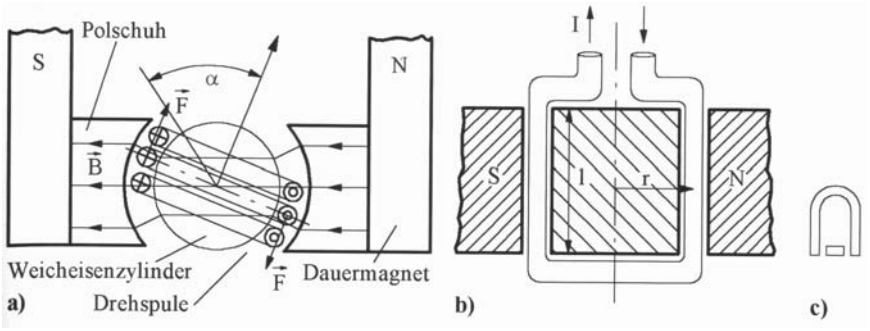

Abbildung 9: Drehspulmesswerk: a) Prinzipieller Aufbau, b) Schnittbild, c) Schaltsymbol

Der Einheitsvektor $\vec{e}_a$ in Gleichung 43 auf der vorherigen Seite weist in Richtung der Drehachse. Das rücktreibende Moment $\vec{M}_{mech} = -D\,\alpha\,\vec{e}_a$ wird von einer Spiralfeder bereit gestellt, die an der Drehachse angebracht ist. Bei Gleichgewicht der Momente $\vec{M}_{em} = \vec{M}_{mech}$ kommt die Drehspule bzw. der mit ihr verbundene Zeiger bei einem bestimmten Winkel α zur Ruhe.

$$\alpha = \frac{2NrlB}{D} I = S_i \cdot I \tag{44}$$

$$\text{Stromempfindlichkeit} \quad S_i = \frac{\alpha}{I} = \frac{2NrlB}{D} \tag{45}$$

Wird an Stelle eines Gleichstroms ein Wechselstrom $i(t)$ durch die Drehspule geschickt, so wirkt die mechanische Trägheit des Systems integrierend bzw. Mittelwert bildend. Der Zeigerausschlag des Drehspulinstruments ist daher proportional dem arithmetischen Mittelwert (Gleichwert bzw. Gleichanteil) des fließenden Stroms.

Beim Einschalten eines Stroms durch die Drehspule erreicht der Zeiger aufgrund der mechanischen Trägheit des Systems die Gleichgewichtsstellung nicht sofort. Mitentscheidend für die Geschwindigkeit des Einschwingens auf den Beharrungswert α_0 ist dabei die Dämpfung, wobei zur Vereinfachung eine Dämpfung proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ angenommen wird. Das Dämpfungsmoment ist damit $\eta\dot{\alpha}$, wobei η das Maß der Dämpfung beschreibt. Für eine Drehspule mit dem Trägheitsmoment Θ beträgt das Trägheitsmoment $\Theta\,\ddot{\alpha}$. Für die Drehbewegung $\alpha(t)$ erhält man somit folgende Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\Theta\ddot{\alpha}(t) + \eta\dot{\alpha}(t) + D\alpha(t) = M_{em}(t) \tag{46}$$

Hierbei ist $M_{em}(t)$ das durch den zu messenden Strom hervorgerufene elektromagnetische Moment und $\alpha(t)$ der momentane Zeigerwinkel. Im Allgemeinen interessiert man sich für die Lösung nach einer Sprunganregung, d. h. nach Anlegen eines sprunghaft auf einen konstanten Wert angestiegenen Stroms. Führt man die folgenden Substitu-

tionen durch, so erhält man:

$$\text{Eigenkreisfrequenz} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta}} \tag{47}$$

$$\text{normierter Dämpfungskoeffizient} \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{2\sqrt{\Theta D}} \tag{48}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\,\ddot{\alpha} + \frac{\tilde{\eta}}{\omega_0}\,\dot{\alpha} + \alpha = \frac{1}{D}\,M_{em}(t) \tag{49}$$

Je nach Höhe des normierten Dämpfungskoeffizienten $\tilde{\eta}$ ergeben sich nach einer Sprunganregung von $M_{em}(t<0)=0$ auf $M_{em}(t\geq 0)=M_0$ für $t\to\infty$ unterschiedliche Lösungen für $\alpha(t)$. Der im folgenden verwendete Winkel α_0 ist der Beharrungswert für $t\to\infty$ und $\tilde{\eta}>0$.

- $\tilde{\eta}=0$ (keine Dämpfung)
  Es stellt sich eine ungedämpfte harmonische Schwingung mit ω_0 um den Beharrungswert α_0 herum ein:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 - \cos(\omega_0 t) \tag{50}$$

- $\tilde{\eta}<1$ (gedämpfte periodische Schwingung)

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 - \frac{\omega_0}{\omega}\,e^{-\tilde{\eta}\omega_0 t}\cos(\omega t-\varphi) \tag{51}$$

$$\text{mit} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\tilde{\eta}^2} \tag{52}$$

$$\text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{(1-\tilde{\eta}^2}}\right) \tag{53}$$

- $\tilde{\eta}=1$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 - e^{-\omega_0 t}(1+\omega_0) \tag{54}$$

- $\tilde{\eta}>1$ (überdämpfte, kriechende Einstellung)

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\tilde{\eta}-1}}\left[-\frac{1}{\tau_2}\,e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_1}\,e^{-t/\tau 2}\right] \tag{55}$$

$$\text{mit} \quad \tau_1 = \frac{1}{\omega_0\left(\tilde{\eta} - \sqrt{\tilde{\eta}^2-1}\right)} \tag{56}$$

$$\text{und} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0\left(\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2-1}\right)} \tag{57}$$

Das Einschwingverhalten nach Sprunganregung für verschiedene Werte der Dämpfung ist in Abbildung 10 dargestellt. Ein Wert $\tilde{\eta} \approx 0,8$ erscheint zum Erzielen einer möglichst geringen Einschwingzeit optimal. Eine genauere Betrachtung kann unter Berücksichtigung des in Gleichung 38 auf Seite 17 definierten dynamischen Fehlers erfolgen.

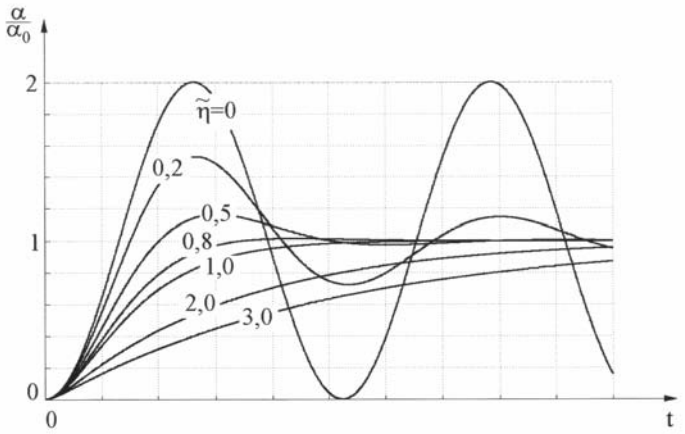

Abbildung 10: Normierte Sprungantwort eines Drehspulmesswerks in Abhängigkeit von der Dämpfung

Konstruktiv wird die Dämpfung beim Drehspulmesswerk durch einen Aluminiumrahmen erreicht, auf den die Drehspule aufgewickelt ist. Die bei Drehung des Rahmens induzierten Wirbelströme bewirken in guter Näherung eine Dämpfung proportional zu $\dot{\alpha}$, wie dies bei Aufstellen der Differentialgleichung 49 angenommen wurde.

Die in diesem Abschnitt gemachten Betrachtungen gelten völlig allgemein für alle Messsysteme, deren Dynamik sich durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung in der Form von Gleichung 49 beschreiben lässt.

Galvanometer Drehspulmesswerke können in Sonderbauformen auch zur Messung kleinster Ströme bis herunter in den pA-Ampère-Bereich verwendet werden. Dazu muss die Stromempfindlichkeit gemäß Gleichung 45 auf Seite 24 sehr groß gewählt werden. Dies kann nur begrenzt durch eine hohe Windungszahl N und geringe Federkonstante D erreicht werden, da viele Windungen eine erhöhte Masse der Drehspule und damit ein hohes Trägheitsmoment zur Folge haben. In Verbindung mit einer geringen Federkonstanten erhält man damit eine zu niedrige Eigenfrequenz. Geschickter ist die Verwendung eines sogenannten Lichtzeigers, d. h. an der Drehachse wird ein kleiner Spiegel angebracht, der einen auf den Spiegel gerichteten Lichtstrahl reflektiert. Der trägheitslose „Lichtzeiger“ kann im Prinzip mehrere Meter lang sein, so dass mit dem *Spiegelgalvanometer* auch kleinste Winkeländerungen und damit kleinste Ströme erfasst werden können.

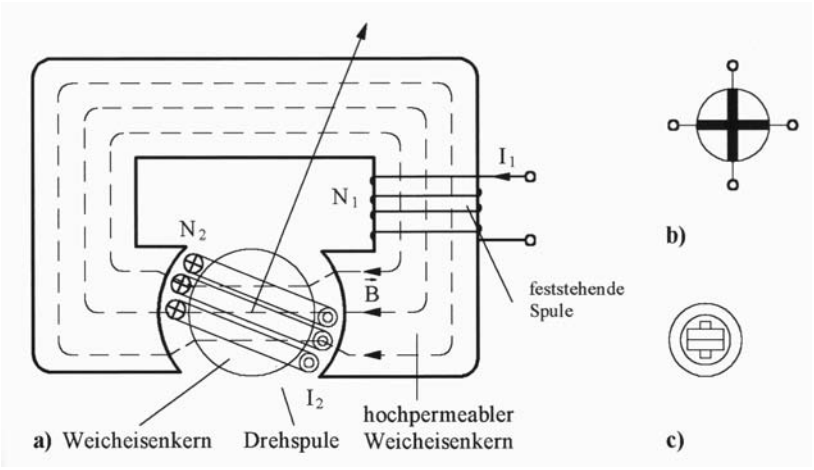

Abbildung 11: Elektrodynamisches Messwerk (eisengeschlossen): a) prinzipieller Aufbau, b) Schaltzeichen, c) Symbol

Wird das Galvanometer kriechend gedämpft mit $D \rightarrow 0$, so erhält man ein sogenanntes *Kriechgalvanometer*, das zur Messung eines Spannungsstoßes $\int udt$ verwendet werden kann. Wegen $\Phi = \int udt$ kann damit der magnetische Fluss gemessen werden.

4.2 Elektrodynamisches Messwerk

Im Unterschied zum Drehspulmesswerk weist das elektrodynamische Messwerk an Stelle eines Permanentmagneten eine feststehende Spule („*Feldspule*“) mit Weicheisenkern auf. Somit ist die magnetische Flussdichte im Luftspalt nicht konstant sondern proportional zum Strom I_1 durch die feststehende Spule:

$$\vec{B}_L = \frac{\mu_0 N_1}{2 b_L} I_1 \tag{58}$$

Das Drehmoment $\vec{M}_{el}$ auf die vom Strom I_2 durchflossene Drehspule mit der Windungszahl N_2 ergibt sich unter Anwendung der Gleichung 43 auf Seite 23 zu:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= 2 N_2 \vec{r} \times \vec{F} = 2 N_2 \vec{r} \times \left[I_2 \left(\vec{l} \times \vec{B}_L \right) \right] \\ &= 2 N_2 r I_2 l B_L \vec{e}_a \\ &= \frac{\mu_0 r l N_1 N_2}{\delta_L D} I_1 I_2 \vec{e}_a \end{aligned} \tag{59}$$

Die Länge des Luftspalts wird in Gleichung 59 durch δ_L angegeben.

Wie beim Drehspulmesswerk erhält man im Momentengleichgewicht durch die rücktreibende Feder der Federkonstanten D einen Zeigerausschlag α von:

$$\alpha = \frac{\mu_0 r l N_1 N_2}{\delta_L D} = k I_1 I_2 \tag{60}$$

Das elektrodynamische Messwerk wirkt demnach multiplizierend, da der Zeigerausschlag gemäß Gleichung 60 auf der vorherigen Seite proportional zum Produkt der Ströme I_1 und I_2 ist.

Wirkleistungsmessung Aufgrund der multiplizierenden Wirkung eignet sich das elektrodynamische Messwerk zur Wirkleistungsmessung $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$. Die Feldspule wird dabei vom durch den Verbraucher fließenden Strom $i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$ durchflossen, die Drehspule wird von einem Strom durchflossen, der der am Verbraucher anliegenden Spannung $u(t) = \hat{U}\cos(\omega t)$ proportional ist, d. h. $i_2 = k_u\, u$. Wegen der mechanischen Trägheit der Drehspule wirkt das Instrument integrierend und man erhält mit Gleichung 60:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T}\int_0^T k\, i_1(t)\cdot k_u\, u(t)\, dt \\ \alpha &= k\, k_u \frac{\hat{I}\,\hat{U}}{2}\cos\varphi \;=\; k\, k_u\, I_{\text{eff}} U_{\text{eff}}\cos\varphi \end{aligned} \tag{61}$$

4.3 Dreheisenmesswerk

Beim Dreheisenmesswerk wird die abstoßende Wirkung zweier gleichsinnig magnetisierter Weicheisenplättchen ausgenutzt (Abbildung 12 auf der nächsten Seite). Die Magnetisierung wird durch eine feststehende Spule erzeugt, durch die der zu messende Strom I fließt. In der Anordnung ist die magnetische Feldenergie $W_{magn} = \frac{1}{2}LI^2$ gespeichert, wobei die Selbstinduktivität L von der Stellung der Eisenplättchen zueinander abhängt. Das elektromagnetische Moment M_{em} bei Änderung des Winkels α kann aus der Ableitung der Feldenergie nach dem Winkel bestimmt werden. Für den Betrag des Moments M_{em} ergibt sich:

$$M_{em} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{dL}{d\alpha}\,I^2 \tag{62}$$

$\frac{dL}{d\alpha}$ ist bauformabhängig und abhängig von α. Mit einer rücktreibenden Feder der Federkonstanten D erhält man im Gleichgewichtsfall eine Auslenkung

$$\alpha \;=\; \frac{1}{2D}\,\frac{dL}{d\alpha}\,I^2 \;=\; k(\alpha)\,I^2 \tag{63}$$

Wird an die Spule ein Wechselstrom $i(t)$ angelegt, so wird wegen der mechanischen Trägheit der quadratische Mittelwert angezeigt, der gleich ist dem Effektivwert.

4.4 Kreuzspulmesswerk (Drehspulquotientenmesswerk)

Beim Kreuzspulmesswerk sind zwei Spulen mit rechteckigem Querschnitt und gleichem Durchmesser im rechten Winkel starr miteinander verbunden. Der schematische

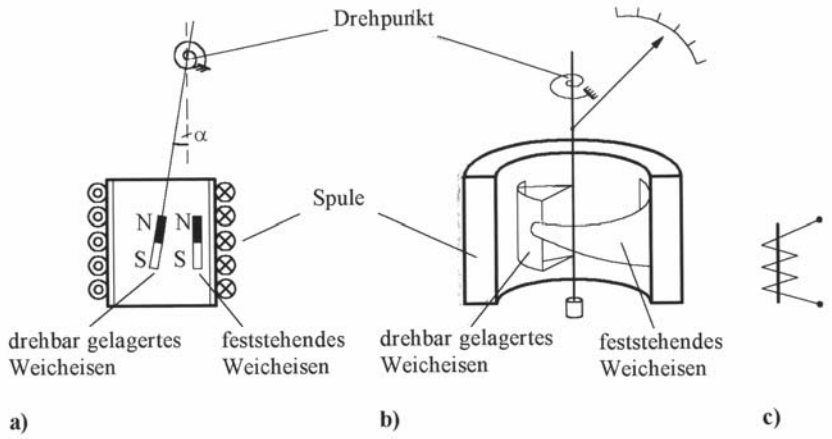

Abbildung 12: Dreheisenmesswerk

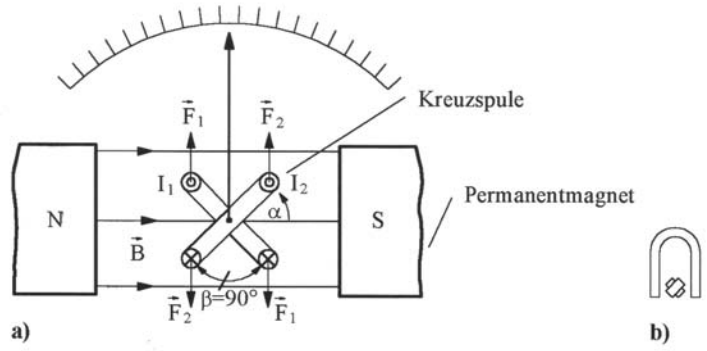

Abbildung 13: Kreuzspulmesswerk (Drehspulquotientenmesswerk), a) Aufbau, b) Symbol

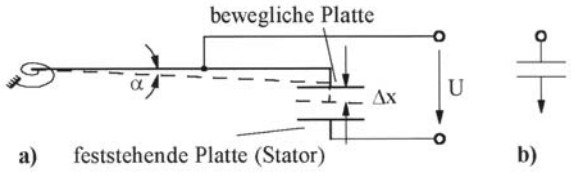

Abbildung 14: Elektrostatisches Messwerk: a) Prinzip, b) Symbol

Aufbau ist in Abbildung 13 auf der vorherigen Seite gezeigt. Die gekreuzten Spulen befinden sich im Luftspalt eines Permanentmagneten, eine rücktreibende Feder gibt es nicht. Da das $\vec{B}$-Feld homogen ist, hängt das jeweilige Drehmoment auf die Spulen vom Winkel zwischen der Normalen der Spulenebene und dem $\vec{B}$-Feld ab. Gleichgewicht herrscht, wenn sich die beiden auf die Spulen wirkenden elektromagnetischen Momente zu Null ergänzen.

$$\begin{aligned} F_1 &= N_1\, I_1\, l\, B \\ F_2 &= N_2\, I_2\, l\, B \\ M_1 &= 2\, r\, F_1\, \sin\alpha \\ M_2 &= -2\, r\, F_2\, \cos\alpha \\ M_1 + M_2 &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \tan\alpha &= \frac{F_2}{F_1} = \frac{N_2\, I_2}{N_1\, I_1} \end{aligned} \tag{64}$$

Das Kreuzspulmesswerk bildet daher den Quotienten der Ströme I_1 und I_2, weshalb es auch den Namen Drehspulquotientenmesswerk hat.

Wird der Peramenentmagnet durch eine Feldspule ersetzt, erhält man das sogenannte elektrodynamische Drehspulquotientenmesswerk, mit dem der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ gemessen werden kann.

4.5 Elektrostatisches Messwerk

Das elektrostatische Messwerk nutzt die Coulomb-Kraft zwischen elektrischen Ladungen aus. Im Prinzip kann hierzu ein Plattenkondensator mit einer feststehenden und einer beweglichen Platte verwendet werden (Abbildung 14).

Die Kraft zwischen den Platten bzw. das Moment bei drehbar gelagerter Platt lässt sich über den Energieinhalt $W_e = \frac{1}{2}\, CU^2$ des elektrischen Feldes berechnen:

$$\begin{aligned} D\alpha &= \frac{1}{2}\, U^2 \frac{dC}{d\alpha} \\ \alpha &= \frac{1}{2D}\, \frac{dC}{d\alpha}\, U^2 = k(\alpha)\, U^2 \end{aligned} \tag{65}$$

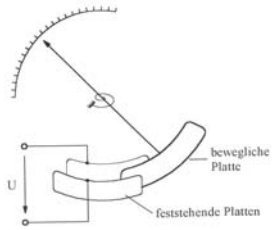

Abbildung 15: Elektrostatisches Messwerk nach dem Influenzprinzip

Das auch als Elektrometer oder Spannungswaage bezeichnet Messwerk ist extrem hochohmig, der Innenwiderstand kann Werte von mehr als 10^{12} Ω erreichen. Das elektrostatische Messwerk ist allerdings nur für Hochspannung geeignet. Eine weitere mögliche Bauform ist in Abbildung 15 gezeigt.

4.6 Thermische Messwerke

Es gibt eine Reihe von Messwerken, die temperaturabhängige Eigenschaften ausnutzen. Teilweise sind diese nur noch von historischem Interesse, sollen aber der Vollständigkeit halber kurz angesprochen werden.

Hitzdrahtinstrument Beim Hitzdrahtinstrument erwärmt sich ein Draht durch Stromfluss. Die damit verbundene Längenänderung bewirkt einen Zeigerausschlag. Da die Erwärmung des Drahts lediglich vom Effektivwert des Stroms abhängt, ist das Hitzdrahtinstrument zur Messung des Effektivwerts geeignet.

Bimetallmesswerk Das Bimetallmesswerk besteht aus einem zu einer Spirale aufgerollte Bimetallstreifen. Bei Erwärmung durch Stromfluss ergibt sich eine Aufrollbewegung, die auf einen Zeiger übertragen wird. Das Bimetallmesswerk misst den Effektivwert des Stroms.

Sehr detailreiche Abbildungen alter Messgeräte und Erläuterungen des Funktionsprinzips finden sich unter *www.alte-messgeraete.de*.

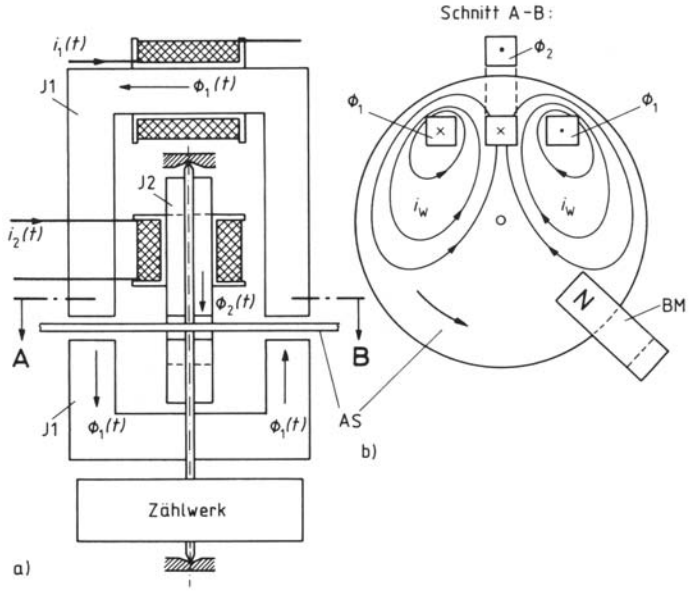

Abbildung 16: Prinzip eines Induktionszählers

4.7 Induktionszähler

Induktionszähler (auch Ferraris-Zähler genannt) werden immer noch in großen Stückzahlen zur Messung der Wirkenergie im Wechselstromnetz eingesetzt und sind in praktisch jedem Haushalt zu finden. Eine drehbar gelagerte Aluminiumscheibe wird von zwei magnetischen Wechselflüssen Φ_1, Φ_2 durchsetzt, die von zugehörigen Strömen i_1, i_2 erzeugt werden. Jeder der beiden Wechselflüsse erzeugt Wirbelströme, die sich gegenseitig beeinflussen und bei geeigneter Phasenlage ein Drehmoment auf die Scheibe bewirken (Abbildung 16). Damit sich eine Drehzahl einstellt, die der Wirkleistung proportional ist, muss noch ein Bremsmagnet als drehzahlabhängige Wirbelstrombremse vorgesehen werden. Werden mit einem mechanischen Zählwerk die Umdrehungen gezählt, erhält man eine direkte Anzeige der elektrischen Wirkenergie.

5 Messung bei Gleichstrom und Gleichspannung

5.1 Messung von Gleichströmen

Soll der durch einen Widerstand R_L fließende Strom gemessen werden, so ist das Strommessgerät mit dem Widerstand in Reihe zu schalten (Abbildung 17 auf der nächsten Seite). Das speisende aktive Netzwerk ist hierbei reduziert auf seine Ersatzschaltung als reale Spannungsquelle. Da das Strommessgerät den Innenwiderstand

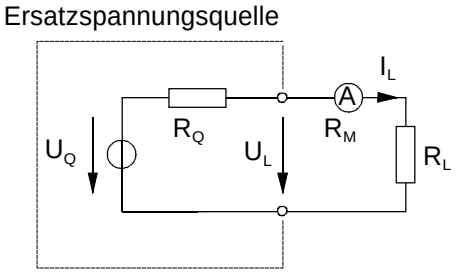

Abbildung 17: Strommessung in einem Zweig eines Gleichstromnetzwerks

R_M aufweist, ist bei Einschleifen des Messgeräts der Gesamtwiderstand im Zweig $R_L + R_M$, der gemessene Strom I_L ist daher kleiner als der wahre Wert. Damit der Fehler vernachlässigbar ist, muss der Innenwiderstand des Strommessgeräts möglichst klein sein gegenüber der Summe der übrigen Widerstände im Zweig, d. h. $R_M \ll R_Q + R_L$. Grundsätzlich handelt es sich hierbei um einen systematischen Fehler, der rechnerisch korrigiert werden kann.

5.2 Messung von Gleichspannung

Ein Strommessgerät mit Innenwiderstand R_M kann auch als Spannungsmessgerät verwendet werden, da bei Anlegen einer Spannung U wegen des Innenwiderstands R_M der Strom $I = U/R_M$ fließt. Der angezeigte Strom muss daher lediglich mit dem Innenwiderstand R_M multipliziert werden, um die gesuchte Spannung U zu erhalten. Durch das Einschalten des Spannungsmessgeräts gemäß Abbildung 18 auf der nächsten Seite erhöht sich die Belastung der Ersatzspannungsquelle und die gemessene Spannung ist systematisch zu klein. Dieser systematisch Fehler ist zu vernachlässigen, wenn der Strom durch R_M sehr klein gegenüber I_L ist, d. h. $R_M \gg R_L$.

5.3 Gleichzeitige Messung von Strom und Spannung

Soll gleichzeitig an einem Lastwiderstand R_L die anliegende Spannung U_L und der fließende Strom I_L gemessen werden, so gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten. In Abbildung 19 auf der nächsten Seite links ist die stromrichtige Variante gezeigt. D. h. der Strom durch den Lastwiderstand I_L wird richtig gemessen. Bei genauer Betrachtung muss jedoch berücksichtigt werden, dass der gemessene Strom I_L wegen des Innenwiderstands R_{MI} kleiner ist, als ohne eingeschleiftes Strommessgerät. In manchen Lehrbüchern wird diese Variante daher auch „pseudokorrekt“ genannt, da ledig-

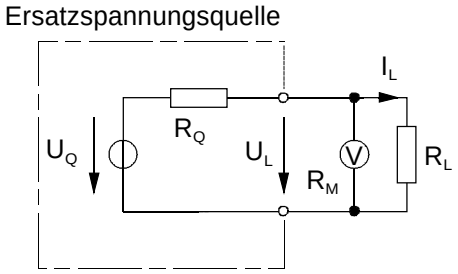

Abbildung 18: Spannungsmessung in einem Zweig eines Gleichstromnetzwerks

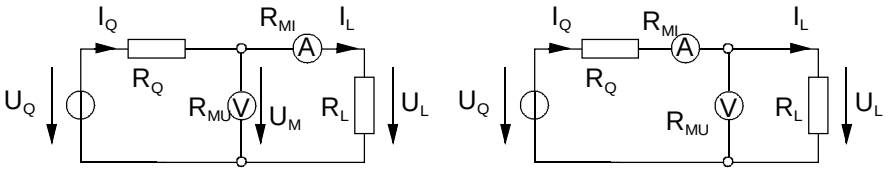

Abbildung 19: Gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung: links stromrichtig, rechts spannungsrichtig

lich der aktuelle Stromwert richtig angezeigt wird. Die gemessene Spannung U_M ist um den Spannungsabfall an R_{MI} größer als U_L und daher systematisch zu groß.

Abbildung 19 rechts zeigt die spannungsrichtige Schaltung, es wird die korrekte Spannung am Widerstand R_L gemessen, jedoch ist diese Spannung um den Spannungsabfall an R_{MI} kleiner als die ursprüngliche Klemmenspannung ohne eingeschaltetes Strommessgerät. Diese Variante wird daher auch als pseudokorrekte Messung der Lastspannung bezeichnet.

Je nach Innenwiderständen der zur Verfügung stehenden Messgeräte erzielt man mit der einen oder anderen Variante die kleineren systematischen Fehler. Sind die Innenwiderstände der Messgeräte und der Innenwiderstand der Quelle bekannt, so lassen sich die systematischen Fehler bestimmen und korrigieren.

Aus der gleichzeitigen Messung von Spannung und Strom lassen sich sowohl der Widerstand gemäß $R = \frac{U}{I}$ als auch die umgesetzte Leistung mit Hilfe von $P = U\,I$ bestimmen. Bei der Fehlerbetrachtung müssen die Messabweichungen sowohl der Strom- als auch der Spannungsmessung berücksichtigt werden.

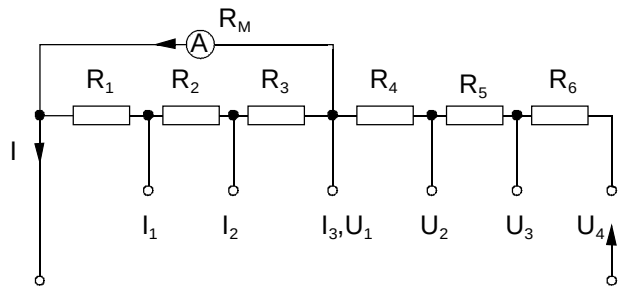

Abbildung 20: Prinzipschaltung eines Vielfachmessgeräts für Spannungs- und Strommessung

5.4 Messbereichserweiterung

Der Messbereich eines Strommessgeräts kann durch Parallelschalten von Widerständen erweitert werden, der jeweilige erzielbare Endausschlag errechnet sich nach der Stromteilerregel. Bei Spannungsmessgeräten müssen zur Messbereichserweiterung Widerstände vorgeschaltet werden, wobei die Spannungsteilerregel zu beachten ist. Durch eine Kombination aus umschaltbaren Parallel- und Vorschaltwiderständen erhält man ein Unviversalmessgerät (Abbildung 20. Der an den Klemmen wirksame Widerstand ist dann jedoch vom gewählten Messbereich abhängig. Bei analog anzeigenden Voltmetern wird der Innenwiderstand üblicherweise in der Einheit $\mathrm{k\Omega/V}$ angegeben. Bei der Angabe $20\,\mathrm{k\Omega/V}$ und Messbereich 100 V beträgt der tatsächlich wirksame Innenwiderstand auf Grund des vorgeschalteten Spannungsteilers $200\,\mathrm{k\Omega}$. Der Innenwiderstand steigt also mit dem Messbereich an.

Auch bei der Strommessung hängt der Innnenwiderstand vom gewählten Messbereich ab. Wie man aus Abbildung 20 sieht, wird der Innenwiderstand umso größer, je kleiner der Strommessbereich gewählt wird.

5.5 Widerstandsmessung

Grundsätzlich kann der Gleichstromwiderstand R durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung ermittelt werden, wie in Abschnitt 5.3 auf Seite 33 beschrieben wurde.

5.5.1 Direkte Messung

Praktischer als die gleichzeitige Messung von Strom und Spannung sind die im folgenden besprochenen Verfahren, wie sie auch in Vielfachmessgeräten eingesetzt werden.

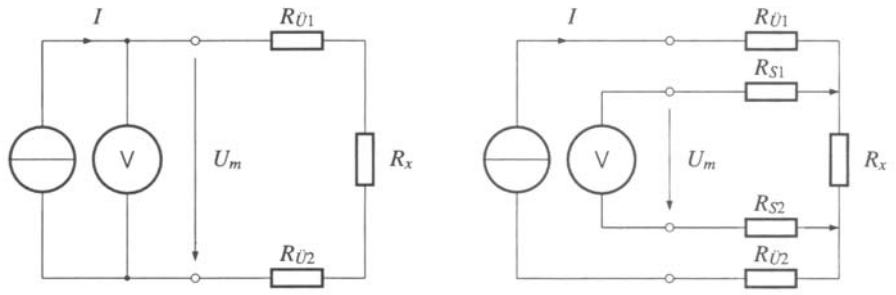

Abbildung 21: Widerstandsmessung: a) Zweileitermessung, b) Vierleitermessung

Widerstand an idealer Stromquelle Der RUT (*r*esistor under test) wird von einem konstanten Strom I_0 durchflossen. Der Spannungsabfall U_R am Widerstand ist proportional zum Widerstandswert: $R = \frac{U_R}{I_0}$.

Widerstand an idealer Spannungsquelle Der RUT wird an eine konstante Spannung U_0 angeschlossen, gemessen wird der Strom I_R durch den Widerstand. Für den Widerstandswert ergibt sich eine nichtlineare Abhängigkeit:$R \propto \frac{1}{I_R}$.

Widerstand an realer Spannungsquelle An eine Spannungsquelle mit Quellenspannung U_0 und Innenwiderstand R_0 wird der RUT angeschlossen. Gemessen wird wahlweise der Spannungsabfall am RUT oder der Strom durch den RUT. Dieses Verfahren findet üblicherweise in analogen Vielfachmessgeräten mit entsprechend nichtlinearer Teilung der Skala Verwendung.

Vierleitermessung Bei Messung sehr kleiner Widerstände eignen sich die bisher beschriebenen Verfahren nicht, da Übergangswiderstände und Widerstände der Messleitungen die Messung stark verfälschen würden. Es wird daher die sogenannte Vierleiter-Messung angewendet. Wie man aus Abbildung 21 sieht, wird bei der Zweileitermessung nicht der zu messende Widerstand R_x gemessen sondern der Gesamtwiderstand $R_x + R_1 + R_2$. Dahingegen wird bei der Vierleitermessung die Spannung mit separaten Fühlerleitungen („sense-“Leitungen) direkt an R_x gemessen. Wenn der Innenwiderstand des Voltmeters hinreichend groß gegenüber den Widerständen R_{s1}, R_{s2} ist, dann ist die Spannung U_m praktisch gleich der Spannung am Widerstand.

Die Klemmen für die Fühlerleitung werden auch als *Potentialklemmen* bezeichnet.

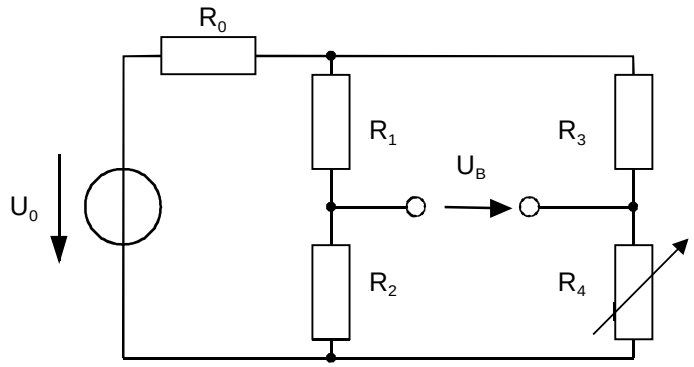

Abbildung 22: Wheatstone Messbrücke

5.5.2 Messbrücken für Gleichspannung

Wenn der Messbereich oder die Genauigkeit der in Abschnitt 5.5.1 behandelten Methoden zur Widerstandsmessung nicht ausreichen, kann man auf Brückenschaltungen zurückgreifen.

Wheatstone Messbrücke Die bekannteste Messbrücke dürfte die von Wheatstone vorgeschlagene Schaltung sein, die in Abbildung 22 gezeigt ist. Im allgemeinen Fall wird sich eine Brückenspannung $U_B \neq 0$ einstellen. Zum Abgleich der Brücke, d. h. zum Erreichen von $U_B = 0$, kann man z. B. den Widerstand R_4 als Einstellwiderstand ausführen. R_2 soll der unbekannte Widerstand sein. Bei abgeglichener Brücke kann der Wert von R_2 leicht berechnet werden als

$$R_2 = R_1 \frac{R_4}{R3}. \tag{66}$$

Die Widerstandmessung mit Hilfe des Brückenabgleichs stellt eine Messung nach dem Kompensationsverfahren dar.

Grundsätzlich ist es möglich, auch im nicht abgeglichenen Fall $U_B \neq 0$ den unbekannten Widerstand zu ermitteln, d. h. im Ausschlagsverfahren. Dann ist jedoch der Einfluss der Spannungsmessung durch den Innenwiderstand des Messinstruments zu berücksichtigen. Um übersichtliche Verhältnisse zu haben, wird in der Praxis zur Messung von U_B gerne ein Instrumentenverstärker mit extrem hochohmigen Eingang verwendet (Abschnit 7.10 auf Seite 78). Der Messstrom kann dann meist vernachlässigt werden.

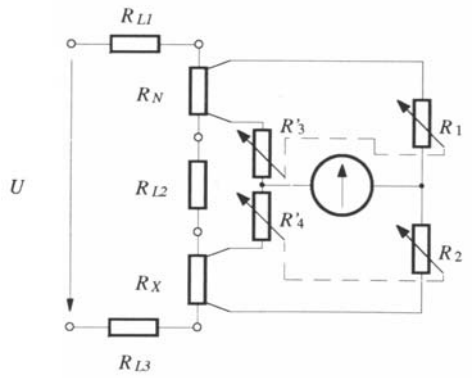

Abbildung 23: Thomson Messbrücke

Thomson Messbrücke Zur Messung sehr kleiner Widerstände (im mΩ-Bereich) wird die Thomson Messbrücke (auch Kelvin Brücke genannt) verwendet.

Der unbekannte, niederohmige Widerstand R_X wird mit dem ebenfalls niederohmigen R_N verglichen. In R_{L2} sind sämtliche unbekannten Leitungs- und Übergangswiderstände zusammengefasst. Der Hauptzweig der Brücke wird durch die Reihenschaltung aus R_N, R_{L2} und R_X gebildet. Der durch den Hauptzweig fließende Strom verursacht an R_N und R_X Spannungsabfälle, die an Potentialklemmen unmittelbar an den Widerständen R_N und R_X abgegriffen werden. Die Widerstände R'_3, R'_4, R_1, R_2 müssen so hochohmig sein, dass über die zugehörigen Zweige nur ein gegenüber dem Hauptzweig vernachlässigbarer Strom fließt. Weiterhin soll durch eine starre Kopplung der Stellwiderstände gewährleistet sein, dass $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R'_3}{R'_4}$. Wandelt man das Dreieck aus R_{L2}, R'_3, R'_4 in einen Stern um, so erhält man die leichter berechenbare Ersatzschaltung in Abbildung 24.

Im abgeglichenen Fall erhält man für den Widerstand R_x:

$$R_x = R_N \frac{R_2}{R_1} \tag{67}$$

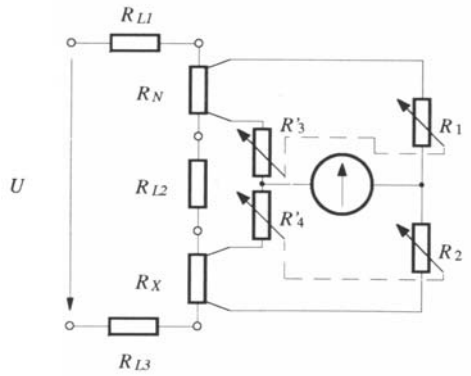

Abbildung 24: Ersatzschaltung der Thomson Messbrücke

6 Messung bei Wechselstrom und Wechselspannung

6.1 Kenngrößen

Für die Charakterisierung von Wechselgrößen sind eine Reihe von Kenngrößen gebräuchlich.

- *Arithmetischer Mittelwert*

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(t)\,dt \tag{68}$$

- *Gleichrichtwert*

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |u(t)|\,dt \tag{69}$$

- *Effektivwert* (quadratischer Mittelwert)

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u^2(t)\,dt} \tag{70}$$

- *Scheitelfaktor* (crest factor)

$$C = \frac{\text{Scheitelwert}}{\text{Effektivwert}} = \frac{\hat{U}}{U_{\text{eff}}} \tag{71}$$

- *Formfaktor*

$$F = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}} = \frac{U_{\text{eff}}}{\overline{|u|}} \tag{72}$$

Die obigen Definitionen gelten für beliebige periodische Spannungsverläufe $u(t)$ mit Periodendauer T. Für rein sinusförmige Spannungen beträgt der Scheitelfaktor $C = \sqrt{2}$ sowie der Formfaktor $F = \frac{\pi}{(2\sqrt{2})} = 1,11$. Häufig hat man den Fall einer Gleichspannung $u_$ mit überlagertem reinen Wechselspannungsanteil $u_\sim = \hat{U}\sin\omega t$. Der Effektivwert des Wechselanteils $U_{\sim\text{eff}}$ errechnet sich zu

$$U_{\sim\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_\sim^2(t)\,dt}. \tag{73}$$

Der Effektivwert der Mischspannung $U_{\text{ges}} = u_{_} + u_{\sim}(t)$ ergibt sich als

$$U_{\text{effges}} = \sqrt{u_{_}{}^2 + u_{\sim}^2(t)} \tag{74}$$

Des weiteren soll noch der Begriff der Welligkeit w definiert werden:

- *Welligkeit w*

$$w = \frac{U_{\sim\text{eff}}}{u_{_}} \tag{75}$$

6.2 Gleichrichtung

Bei der Messung von Mittelwerten kann man von der integrierenden Wirkung der elektromechanischen Messwerke Gebrauch machen.

6.2.1 Gleichrichtwert

Den Gleichrichtwert erhält man nach Gleichung 69 durch Betragsbildung und anschließende Mittelung. Die Betragsbildung kann durch eine Vollweg-Gleichrichtung gemäß Abbildung 25 vorgenommen werden, die Mittelung erfolgt im Strommessgerät (z. B. Drehspul-Instrument) Die Flussspannungen der Dioden treten als systematischer Fehler auf, der umso störender wird, je kleiner die zu messenden Spannungen sind.

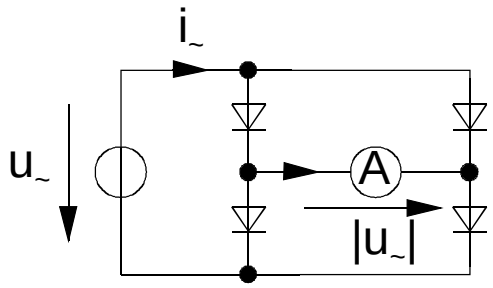

Abbildung 25: Vollweg-Gleichrichtung (Graetz-Schaltung)

6.2.2 Scheitelwert

Der Scheitelwert $\hat{U}$ (Spitzenwert) ist der betragsmäßig größte Wert des Signals. Allgemein gilt:

$$\hat{U} = \text{Maximum}(\hat{U}_+, \hat{U}_-) \tag{76}$$

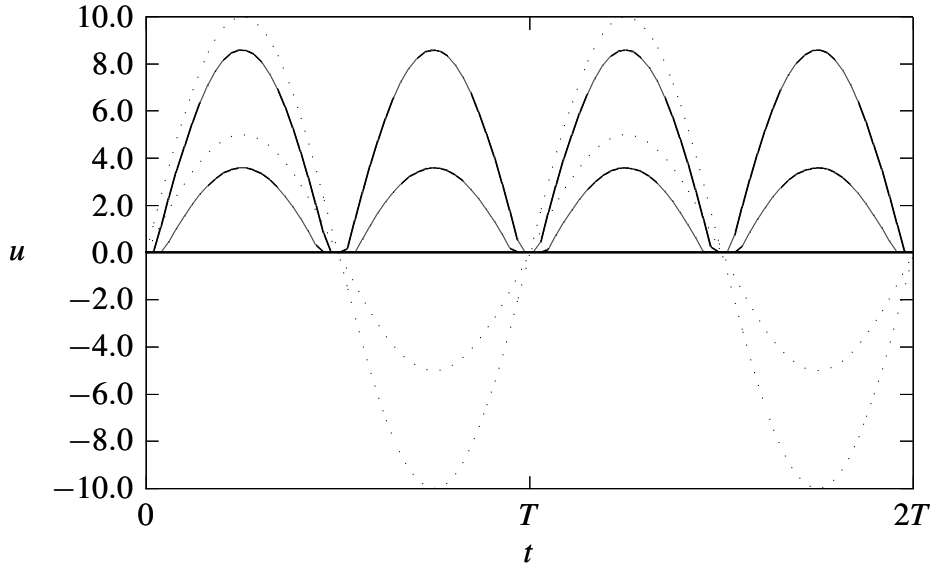

Abbildung 26: Eingangsspannung (gestrichelt) und Ausgangsspannung (durchgezogen) bei der Graetz-Schaltung für $\hat{U} = 10$ V und $\hat{U} = 5$ V

Zur Messung des postiven Scheitelwerts dient ein Einweg-Gleichrichter mit Speicherkondensator nach Abbildung 27. Solange die Eingangsspannung $u_\sim$ um die Flussspannung $U_F \approx 0,7$ V der Diode größer ist als die Spannung U_C am Kondensator, wird der Kondensator aufgeladen bis $U_C = \hat{U} - U_F$. Da die Diode nach Überschreiten des Maximums sperrt, wird der Kondensator C_L über das Messwerk entladen. Das Messwerk muss daher möglichst hochohmig sein, damit der Ladungsabfluss möglichst gering ist.

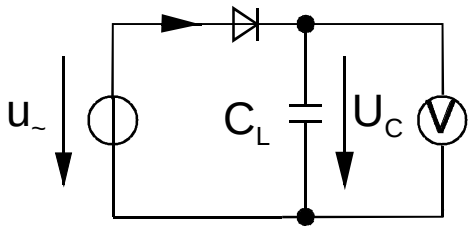

Abbildung 27: Prinzipschaltung eines Spitzenwertgleichrichters

6.2.3 Effektivwert

In Abbildung 25 auf Seite 41 ist eine Schaltung zur Messung des Gleichrichtwerts dargestellt. Grundsätzlich kann bei bekannter Kurvenform vom Gleichrichtwert auf den Effektivwert umgerechnet werden. Üblicherweise sind die Skalen für sinusförmige Spannungs- und Stromverläufe ausgelegt. Wenn die Zeitverläufe von der reinen Sinusform abweichen, ist mit Messabweichungen zu rechnen.

Aufgrund seiner multiplizierenden und integrierenden Wirkung ist das elektrodynamische Messwerk unabhängig von der Kurvenform zur Effektivwertmessung geeignet. Hierzu muss die zu messende Größe gleichzeitig an die beiden Spulen angelegt werden. Dadurch wird die Größe quadriert, durch die Trägheit des Messwerks erfolgt die Integration.

6.3 Messwandler

Messwandler werden vor allem in der Energie- und Hochspannungstechnik eingesetzt, um sehr hohe Spannungen und Ströme auf einfacher messbare Größen zu wandeln. Am robustesten sind hierbei transformatorische Wandler, zur Strommessung werden aber auch mehr und mehr auf dem Hall-Effekt basierende Wandler eingesetzt.

6.3.1 Spannungswandler

Die zu messende Wechselspannung $U_{1\text{eff}}$ wird an die Primärwicklung (Windungszahl N_1) eines Transformators angelegt, die Spannung $U_{2\text{eff}}$ an der Sekundärwicklung (Windungszahl N_2) wird mit einem hochohmigen Voltmeter gemessen (Abbildung 28 auf der nächsten Seite). Das Spannungsübertragungsverhältnis k_u des Wandlers ergibt sich aus dem Übersetzungsverhältnis ü bzw. aus dem Verhätltnis der Windungszahlen:

$$\frac{U_{1\text{eff}}}{U_{1\text{eff}}} = \frac{N_1}{N_2} = \text{ü} = k_u \tag{77}$$

Durch Streuverluste und Belastung der Sekundärseite durch das angeschlossene Voltmeter können sich Abweichungen von dem idealen Übersetzungsverhältnis nach Gleichung 77 ergeben. Um Messwerte entsprechend der angegebene Genauigkeitsklasse zu erhalten, müssen die im Datenblatt des Wandlers angegebenen Bereiche des Bürdenwiderstands eingehalten werden. Neben dem Betragsfehler ist insbesondere für Leistungsmessungen auch noch der Winkelfehler zu beachten.

Zur Messung höchster Spannungen werden kapazitive Spannungsteiler mit nachgeschaltetem transformatorischen Spannungswandler verwendet. Durch geeignete Kompensationsmaßnahmen (Drossel) ist es möglich, bei der Nennfrequenz Phasengleichheit zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung zu erhalten.

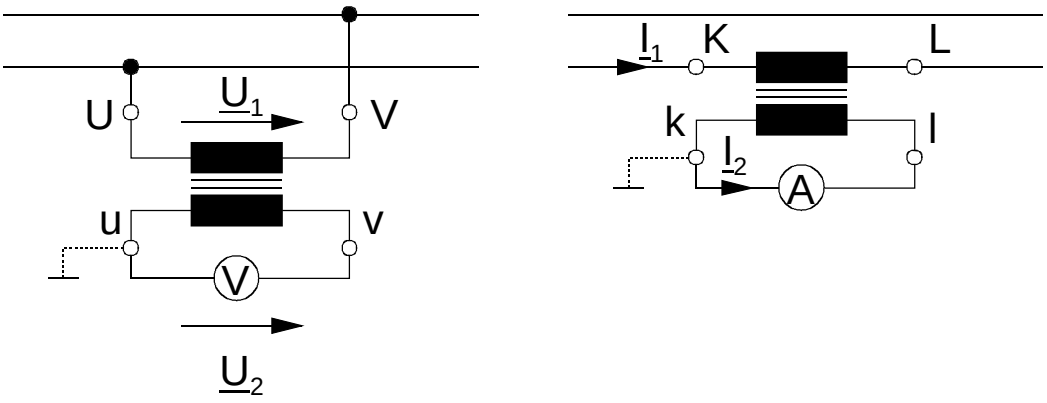

Abbildung 28: Spannungswandler (links) und Stromwandler (rechts)

6.3.2 Transformatorische Stromwandler

Bei transformatorischen Stromwandlern wird der zu messende Strom I_1 durch die Primärwicklung mit wenigen Windungen N_1 geschickt und der Kurzschlussstrom I_2 in der Primärwicklung mit N_2 gemessen. Bei idealisiertem Transformator gilt:

$$\frac{I_{1\text{eff}}}{I_{1\text{eff}}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}} = k_i \tag{78}$$

Es ist unbedingt zu beachten, dass Stromwandler sekundärseitig niemals im Leerlauf betrieben werden dürfen, da sonst an der Sekundärspule die k_i-fache Primärspannung anliegen würde. Aus Sicherheitsgründen sind Stromwandler daher sekundärseitig häufig mit Überspannungsableitern ausgestattet.

6.3.3 Stromwandler mit Hallsensoren

Transformatorische Stromwandler sind grundsätzlich nur für Ströme ohne Gleichanteil geeignet. Zur Messung beliebiger Ströme sind grundsätzlich Hall-Elemente geeignet, die die stromproportionale magnetische Flussdichte $B(I)$ messen.

Halleffekt Der klassische Halleffekt beruht auf der Lorentzkraft $\vec{F}_L$, die auf eine im magnetischen Feld $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte Ladung q wirkt:

$$F_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{79}$$

$$\text{für} \quad \vec{v} \perp \vec{B} \quad \Longrightarrow \quad F_L = q\,v\,B \tag{80}$$

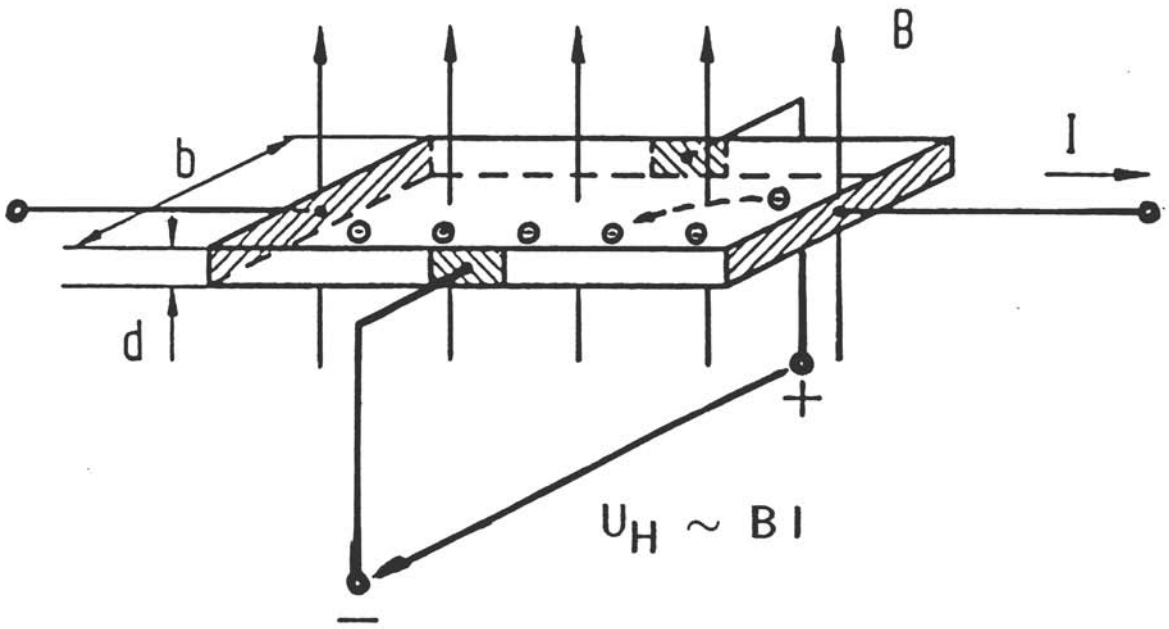

Abbildung 29: Prinzip des Hallsensors

Bei der in Abbildung 29 auf der vorherigen Seite dargestellten rechtwinkligen Anordnung eines Hallsensors im Magnetfeld kann die vektorielle Formulierung der Gleichung 79 vereinfacht werden zu Gleichung 80. Im dynamischen Gleichgewicht stellt sich eine Hallspannung $U_H = R_H \frac{B\,I}{d}$ ein. Dabei ist R_H der sogenannte Hallkoeffizient, der sich aus den Materialeigenschaften des Hallsensors berechnen lässt. Wenn B dem zu messenden Primärstrom I_m proportional ist, dann ist bei $I = \text{const}$ die Hallspannung $U_H \propto I_m$.

Es ist auch möglich, das Magnetfeld durch einen magnetischen Kreis entsprechend Abbildung 30 auf der nächsten Seite zu führen. Abweichungen von der Linearität ergeben sich, wenn das Kernmaterial in Sättigung kommt. Der magnetische Kreis ist daher sorgfältig zu dimensionieren. Ohne Sättigungseffekte arbeiten stromkompensierte Wandler, bei denen eine zusätzliche Spule auf dem Kern aufgebracht wird, die von einem Strom I_S durchflossen wird (Abbildung 31 auf Seite 48). Mit Hilfe eines geschlossenen Regelkreises wird der Strom I_S so eingestellt, dass der resultierende magnetische Fluss verschwindet, d. h.es wird auf eine Hallspannung $U_H \approx 0$ geregelt. Die Größe von I_S ist dann ein Maß für den zu messenden Primärstrom I_P.

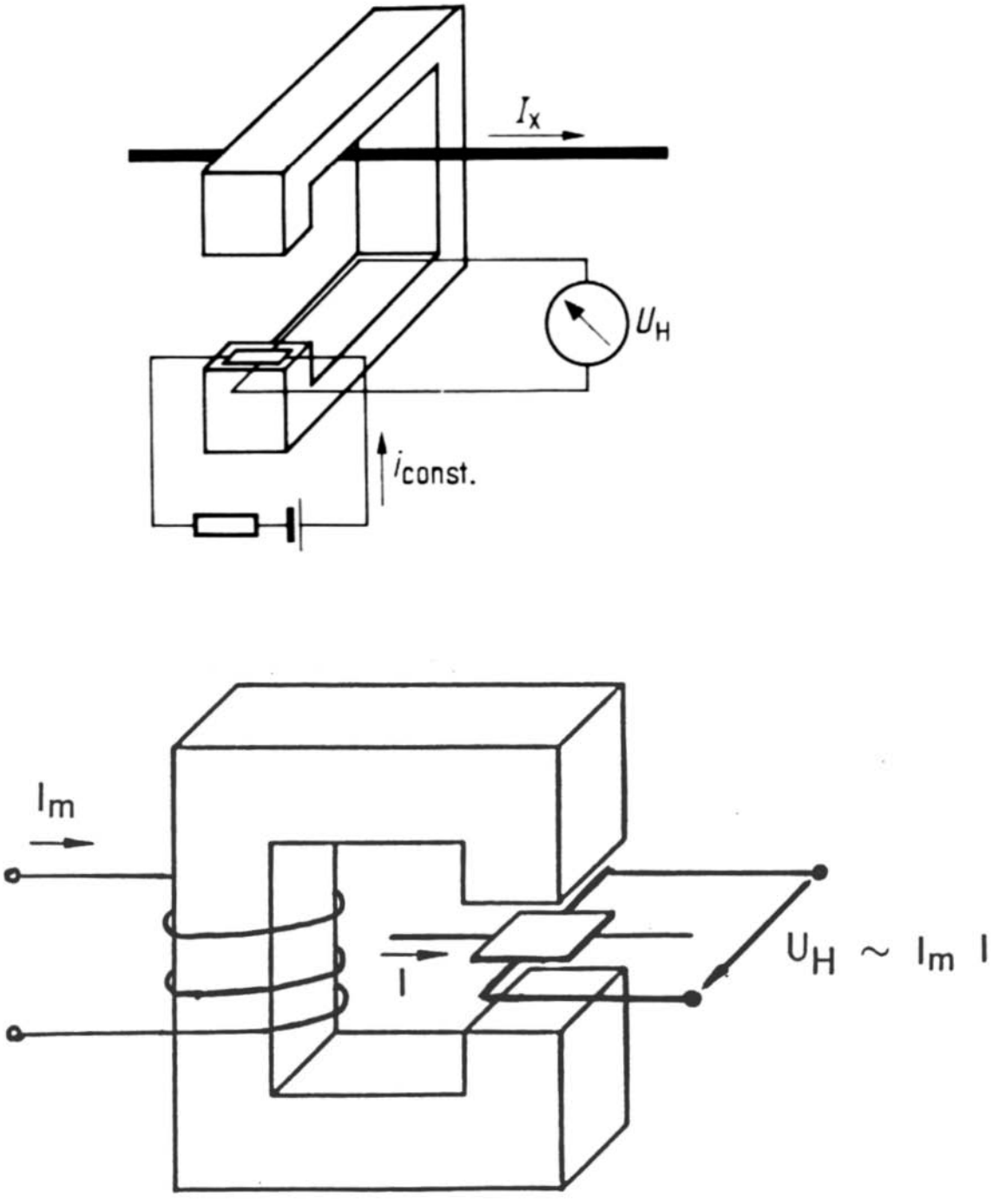

Abbildung 30: Hallsensor im Luftspalt eines magnetischen Kreises

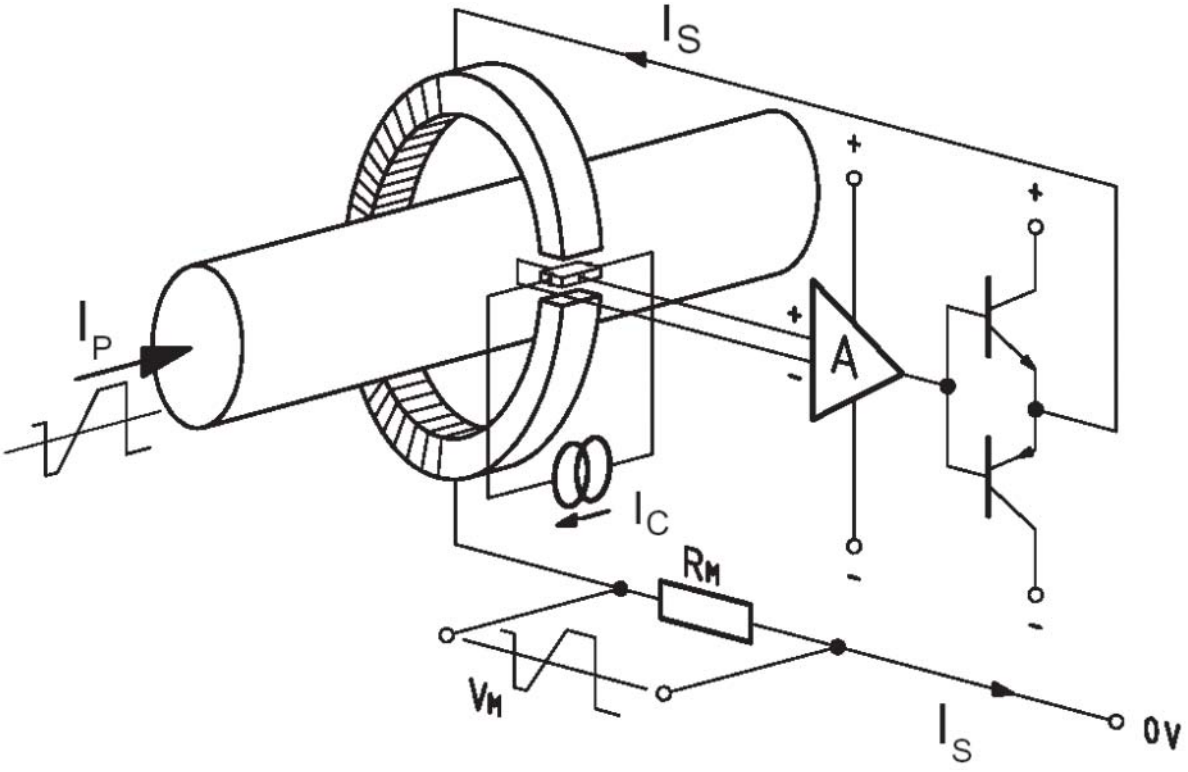

Abbildung 31: Kompensierter Stromwandler

6.4 Messung an komplexen Widerständen

Komplexe Widerstände $\underline{Z}$ kann man schreiben als:

$$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|\, e^{j\varphi} \tag{81}$$

mit R Wirkwiderstand (82)

X Blindwiderstand (83)

$|\underline{Z}|$ Scheinwiderstand (Impedanz) (84)

φ Phasenwinkel (85)

Zur vollständigen Angabe des komplexen Widerstands ist daher die Kenntnis zweier Größen notwendig, entweder Wirk- und Blindanteil oder Scheinwiderstand und Phasenwinkel.

6.4.1 Reale Induktivität

Eine reale Induktivität ist wegen des endlichen Wicklungswiderstandes immer mit Verlusten behaftet. Wenn man die Kapzität zwischen den einzelnen Windungen vernachlässigt, besteht die Ersatzschaltung aus einer idealen Induktivität und einem Ohmschen Widerstand in Reihen- oder Parallelschaltung (Abbildung 32). Die Umrechnung von

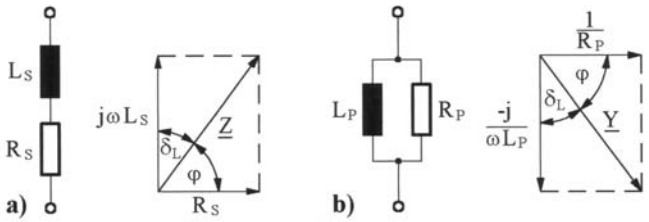

Abbildung 32: Reale Induktivität: a) Reihenersatzschaltung, b) Parallelersatzschaltung

der Widerstandsdarstellung in die Leitwertdarstellung erfolgt mit Hilfe der Beziehung:

$$\underline{Z}_L = R_s + j\omega L_s = \frac{1}{\underline{Y}_L} \tag{86}$$

$$\text{mit} \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} \tag{87}$$

$$\text{Verlustfaktor} \quad \tan\delta_L = \frac{R_s}{\omega L_s} \tag{88}$$

$$\text{Güte} \quad Q_L = \frac{1}{\tan\delta_L} \tag{89}$$

6.4.2 Reale Kapazität

Auch die reale Kapazität kann im einfachsten Fall wahlweise durch eine Reihen- oder Parallersatzschaltung dargestellt werden (Abbildung 33).

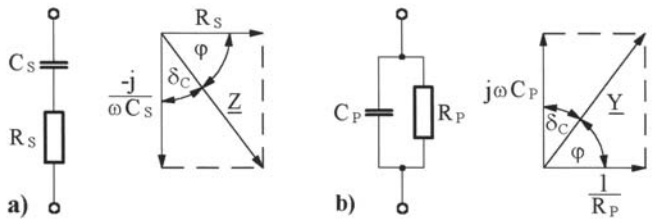

Abbildung 33: Reale Kapazität: a) Reihenersatzschaltung, b) Parallelersatzschaltung

Analog zur realen Induktivität gelten die Beziehungen:

$$\underline{Z}_C = R_s - j\,\frac{1}{\omega C_s} = \frac{1}{\underline{Y}_C} \tag{90}$$

$$\text{mit} \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{R_s} + j\omega C_p \tag{91}$$

$$\text{Verlustfaktor} \quad \tan\delta_C = \omega R_s C_s \tag{92}$$

$$\text{Güte} \quad Q_C = \frac{1}{\tan\delta_C} \tag{93}$$

6.4.3 3-Voltmeter-Verfahren

Beim 3-Voltmeter-Verfahren wird zu dem unbekannten komplexen Widerstand $\underline{Z}_x$ der bekannte Ohmsche Widerstand in Reihe geschaltet, so dass sich die Schaltung gemäß Abbildung 34 ergibt. Je nachdem, ob $\underline{Z}_x$ induktiv oder kapazitiv ist, ergibt sich ein positiver oder negativer Phasenwinkel φ. Diese Unwägbarkeit führt zu zwei möglichen, an der rellen Achse gespiegelten Zeigerdiagrammen für die Spannungen $\underline{U}$, $\underline{U}_X$ und $\underline{U}_N$. Werden diese gleichzeitig mit 3 Voltmetern oder nacheinander in 3 Messungen bestimmt, können die unbekannten Größen bis auf das Vorzeichen von φ berechnet werden.

$$\varphi = \pm\left(180^\circ - \arccos\frac{|\underline{U}|^2 - |\underline{U}_N|^2 - |\underline{U}_X|^2}{2\,|\underline{U}_N|\,|\underline{U}_X|}\right) \tag{94}$$

$$R_X = R_N\,\frac{|\underline{U}_X|}{|\underline{U}_N|}\,\cos\varphi \tag{95}$$

$$X_X = R_N\,\frac{|\underline{U}_X|}{|\underline{U}_N|}\,\sin\varphi \tag{96}$$

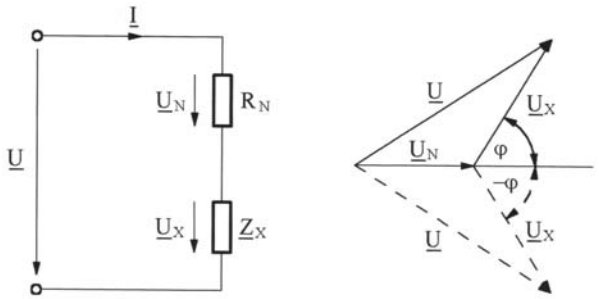

Abbildung 34: 3-Voltmeter-Verfahren zur Bestimmung von Wirk- und Blindwiderstand

6.5 Messbrücken für Wechselspannung

Grunsätzlich sind Wechselspannungsbrücken aufgebaut wie die Wheatstone-Brücke (Abbildung 22 auf Seite 37). Die Brücke wird allerdings mit Wechselspannung gespeist und die Widerstände sind als komplexe Widerstände zu behandeln.

6.5.1 Wien-Brücke

Die Wien-Brücke nach Abbildung 35 dient zur Bestimmung der Ersatzschaltung von Kondensatoren. Je nachdem, ob die Reihenersatzschaltung oder das Parallelersatzschaltung betrachtet werden soll, empfiehlt sich die eine oder andere Variante. Bei

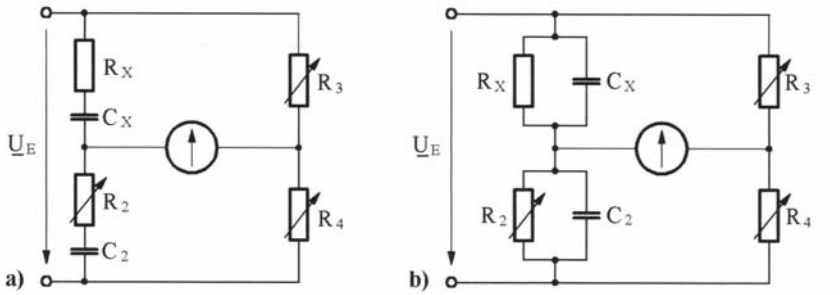

Abbildung 35: Wien Brücke

abgeglichener Brücke erhält man:

$$\begin{aligned} C_X &= C_2 \frac{R_4}{R_3} \\ R_X &= R_2 \frac{R_4}{R_3} \\ \text{Reihenschaltung} \quad \tan\delta_R &= \omega C_2 R_2 \\ \text{Parallelschaltung} \quad \tan\delta_P &= \frac{1}{\omega C_2 R_2} \end{aligned} \tag{97}$$

6.5.2 Schering Brücke

Für Messung mit hohen Spannungen ist die Wien-Brücke weniger geeignet, da der Abgleichwiderstand R_3 direkt am „heißen“ Ende der Brücke anliegt. Günstiger ist es, eine Brücke zu verwenden, bei der alle Abgleichelemente gleiches Bezugspotential haben. Eine solche Modifikation bietet die Schering-Messbrücke nach Abbildung 36. Im abgeglichenen Fal ergibt sich.

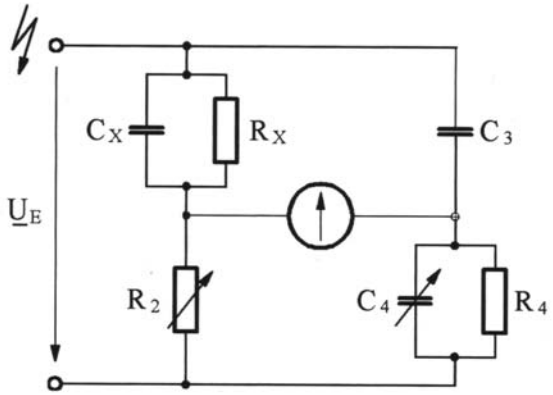

Abbildung 36: Schering Brücke

$$C_X = C_3 \frac{R_4}{R_2\ [1+(\omega R_4 C_4)^2]} \tag{98}$$

$$\tan\delta_X = \tan(90^\circ - \delta_4) = \frac{1}{\tan\delta_4} = \omega C_4 R_4 \tag{99}$$

6.5.3 Wien-Robinson-Brücke

Die Besonderheit der Wien-Robinson-Brücke (Abbildung 37) liegt darin, dass die Abgleichbedingung frequenzabhängig ist. Die Brücke ist abgeglichen, wenn die folgen-

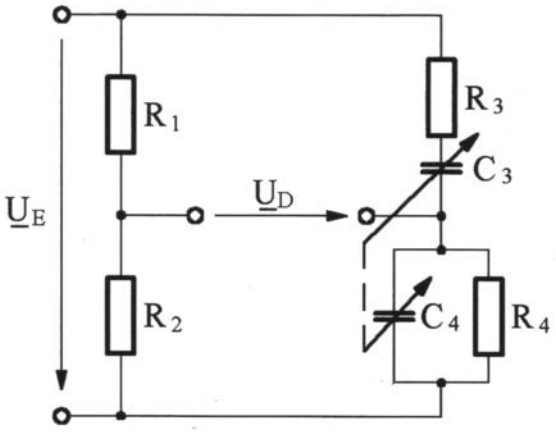

Abbildung 37: Wien-Robinson Brücke

den Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \tag{100}$$

$$C_3\,C_4 = \frac{1}{\omega^2\,R_3\,R_4} \tag{101}$$

Die Bedingung 100 ist automatisch erfüllt, wenn $R_2 = R_3 = R_4 = R; R_1 = 2R$ und $C_3 = C_4 = C$. Man erhält dann eine einfache frequenzabhängige Abgleichbedingung, die zur Frequenzmessung geeignet ist:

$$\omega = \frac{1}{R\,C} \tag{102}$$

6.5.4 Maxwell-Wien-Brücke

Zur Bestimmung verlustbehafteter Induktivitäten verwendet man die Brücke nach Abbildung 38. Bei abgeglichener Brücke erhält man die Paramenter L_X, R_X der Reihenersatzschaltung der Induktivität:

$$L_X = C_4\,R_2\,R_3 \tag{103}$$

$$R_X = R_2\,\frac{R_3}{R_4} \tag{104}$$

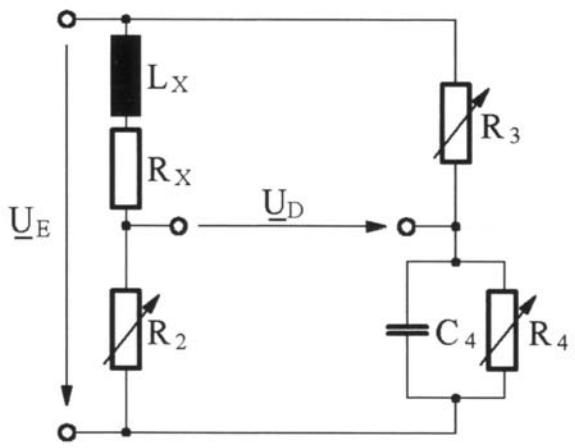

Abbildung 38: Maxwell-Wien Brücke

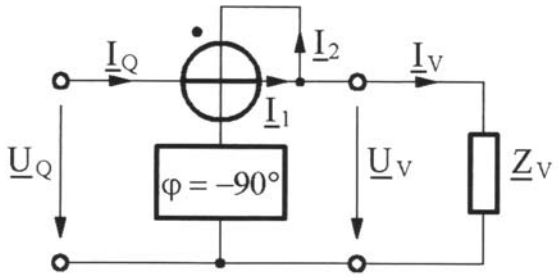

Abbildung 39: Blindleistungsmessung mit Wirkleistungsmesser und 90° Phasenschieber

6.6 Leistungsmessung im Wechselstromkreis

Den Berechnungen in den folgenden Abschnitten liegt die Darstellung der Effektivwertzeiger für Wechselstrom und Wechselspannung zu Grunde.

$$\underline{U}_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}\, e^{-j\varphi_u} \tag{105}$$

$$\underline{I}_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\, e^{-j\varphi_i} \tag{106}$$

Mit der Abkürzung $\varphi = \varphi_i - \varphi_u$ (Phasenwinkel zwischen Strom- und Spannungszeiger), definiert man die komplexe Leistung $\underline{P}$:

$$\underline{P} = \underline{U}_{\text{eff}}\, \underline{I}^*_{\text{eff}}\, e^{j\varphi} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, e^{j\varphi} \tag{107}$$

$$\underline{P} = \Re(\underline{P}) + \Im(\underline{P}) = P + Q \tag{108}$$

$$\text{Wirkleistung} \quad P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\varphi \tag{109}$$

$$\text{Blindleistung} \quad Q = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \sin\varphi \tag{110}$$

$$\text{Scheinleistung} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \tag{111}$$

Die Wirkleistung lässt sich direkt mit einem multiplizierendem Messinstrument bestimmen, z. B. mit einem elektrodynamischen Messinstrument (Abbschnitt 4.2). Zur Messung der Blindleistung kann ebenfalls ein multiplizierendes Instrument verwendet werden, wenn entweder Strom- oder Spannung um 90° phasenverschoben angeschlossen wird. Abbildung 39 zeigt ein Beispiel mit phasengedrehtem Spannungsanschluss. Die Phasendrehung wird durch eine passive Beschaltung mit Induktivitäten und/oder Kapazitäten erreicht. Als Beispiel ist in Abbildung 40 der sogenannte Resonanzphasenschieber gezeigt. Berücksichtigt man den Innenwiderstand R der Spannungsspule, so erhält man als Bedingung für die korrekte Phasendrehung bei der Frequenz ω:

$$\omega L_1 = \omega L_2 = R = \frac{1}{\omega C} \tag{112}$$

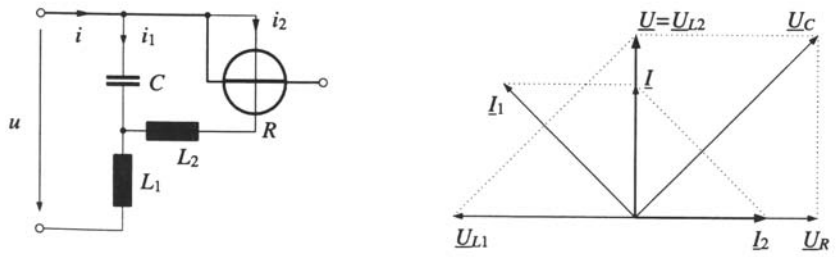

Abbildung 40: Resonanzphasenschieber

Berechnet man den Gesamtwiderstand der Schaltung bei der Resonanzbedingung aus Gleichung 112, so erhält man den rein Ohmschen Innenwiderstand *R* der Spannungsspule.

6.7 Leistungsmessung in Drehstromsystemen

Grundsätzlich können Drehstromsysteme mit oder ohne Neutralleiter ausgeführt sein, entsprechend unterscheidet man zwischen dem 3-Leiter- und 4-Leiter-System. Abbildung 41 zeigt die Sternschaltung im 4-Leitersystem sowie die Dreieckschaltung im 3-Leiter-System. Bei symmetrischer Belastung fließt kein Strom im Neutalleiter. Durch Anwendung der Maschenregel kann man aus dem resultierenden Zeigerdia-

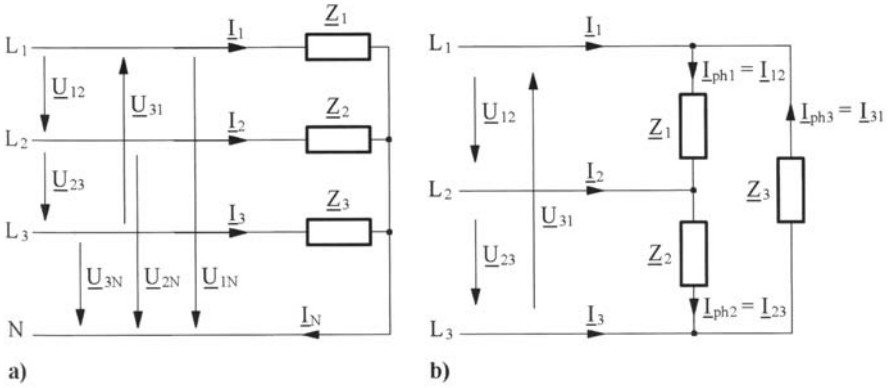

Abbildung 41: a) 4-Leiter-Drehstromsystem, Verbraucher in Sternschaltung, b) 3-Leiter-Drehstromsystem, Verbraucher in Dreieckschaltung

gramm (Abbildung 42) die folgenen Beziehungen zwischen den Dreieck- und den

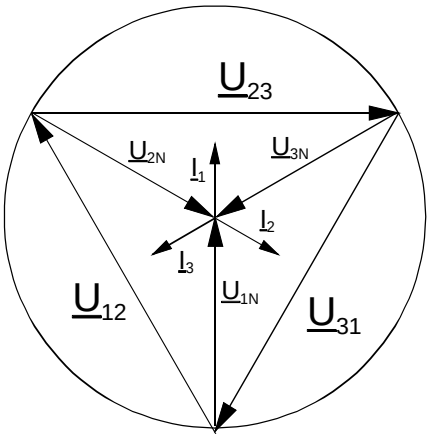

Abbildung 42: Zeigerdiagramm für symmetrisch belastetes Drehstromnetz

Sternspannungen ablesen:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{2N} \quad (113)$$
$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} \quad (114)$$
$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{3N} - \underline{U}_{2N} \quad (115)$$

Von symmetrischer Belastung spricht man, wenn $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$. Es gilt dann:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U} \quad (116)$$
$$\underline{U}_{2N} = \underline{U}\, e^{-j120^\circ} \quad (117)$$
$$\underline{U}_{3N} = \underline{U}\, e^{+j120^\circ} \quad (118)$$

Weiterhin gilt:

$$|\underline{U}_{31}| = \sqrt{|\underline{U}_{1N}|^2 + |\underline{U}_{3N}|^2 - 2\,|\underline{U}_{1N}||\underline{U}_{3N}|\cos 120^\circ}$$
$$|\underline{U}_{31}| = |\underline{U}_{1N}|\,\sqrt{3} \quad (119)$$
$$|\underline{U}_{31}| = |\underline{U}_{23}| = |\underline{U}_{31}| = |\underline{U}|\,\sqrt{3} \quad (120)$$
$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0 \quad (121)$$
$$(122)$$

Für die Ströme gilt:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_N \quad (123)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \quad (124)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}\, e^{-j120^\circ} \quad (125)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}\, e^{+j120^\circ} \quad (126)$$

Im symmetrisch belasteten 4-Leiter-System sowie im 3-Leiter-System ist $\underline{I}_N = 0$.

Zwischen den Strangströmen und den Leiterströmen gilt bei Dreieckschaltung der folgende Zusammenhang:

$$|\underline{I}_{12}| + |\underline{I}_{23}| + ||\underline{I}_{31}| = \frac{1}{\sqrt{3}} |\underline{I}| \quad (127)$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad (128)$$

6.7.1 Wirkleistungsmessung

Bei Drehstromsystemen muss die auf allen Leitern zufließende Leistung berücksichtigt werden. Lediglich bei symmetrisch belasteten Systemen genügt ein einziger Leistungsmesser, da die Gesamtleistung dann einfach berechnet werden kann.

4-Leiter-System Es werden 3 Wirkleistungsmessgeräte gemäß Abbildung 43 zusammengeschaltet. Die gesamte Wirkleistung P_G ergibt sich als

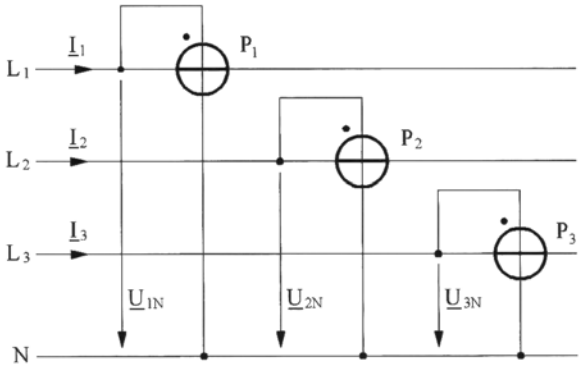

Abbildung 43: Wirkleistungsmessung im 4-Leiter Drehstromsystem

$$P_G = P_1 + P_2 + P_3 \quad (129)$$

Die Addition der Leistungen kann bei elektrodynamischen Messwerken dadurch erfolgen, dass alle 3 Messwerke mechanisch gekoppelt sind und sich dadurch die den Wirkleistungen proportionalen Drehmomente addieren.

3-Leiter-System Zur genauen Messung der Wirkleistung kann man auch im 3-Leiter-System die Schaltung mit 3 Wattmetern verwenden. Allerdings muss dann ein künstlicher Sternpunkt geschaffen werden (Abbildung 44). Da im 3-Leiter-System die

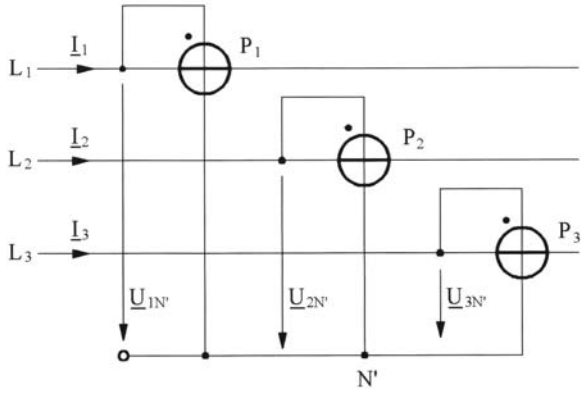

Abbildung 44: Wirkleistungsmessung im 3-Leiter Drehstromsystem mit 3 Wattmetern und künstlichem Sternpunkt

Summe aller Leiterströme nach Gleichung 128 immer Null ergeben muss, kann man bei Verwendung der sogenannten Aaronschaltung (Abbildung 45) ein Wattmeter einsparen. Die gesamte, mit der Aaron-Schaltung erfasste komplexe Leistung beträgt

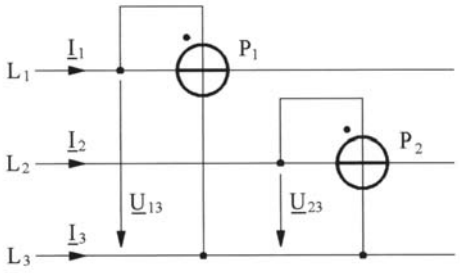

Abbildung 45: Wirkleistungsmessung mit 2-Wattmeter-Verfahren (Aaron-Schaltung)

$$\underline{P} = \underline{U}_{13}\underline{I}_1 + \underline{U}_{23}\underline{I}_2 \tag{130}$$

Aus dem Zeigerdiagramm Abbildung 42 auf Seite 57 kann man die folgenden Beziehungen ablesen und in Gleichung 130 einsetzen.

$$\underline{U}_{13} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{3N} \tag{131}$$
$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} \tag{132}$$
$$0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \tag{133}$$
$$\Longrightarrow \underline{P} = \underline{U}_{1N}\underline{I}_1 + \underline{U}_{2N}\underline{I}_2 + \underline{U}_{3N}\underline{I}_3 \tag{134}$$

Das Resultat in Gleichung 134 ist die gesamte Leistung, die im 3-Leiter-System umgesetzt wird. Damit ist gezeigt, dass die nach Gleichung 130 erfasste Leistung gleich der Gesamtleistung ist. Entsprechendes ist auch die resultierende Wirkleistung $P = \Re\underline{P}$ gleich der gesamten Wirkleistung. Die Verwendung von 2 Wattmetern ist daher ausreichend.

6.7.2 Blindleistungsmessung

Wie bei der Blindleistungsmessung bei einphasiger Wechselspannung könnte man mit 90°-Phasenschiebern arbeiten. Ein Blick auf die Abbildung 42 auf Seite 57 zeigt jedoch, dass dies bei einem symmetrischen Drehstromsystem nicht nötig ist. Man erkennt, dass man im symmetrischen 3-Phasensystem zu jeder Sternspannung eine Außenleiterspannung finden kann, die jeweils um 90° phasenverschoben ist.

4-Leiter-System Im 4-Leiter-System schließt man daher die Spannungspfade an die jeweils passend phasenverschobenen Außenleiterspannungen an (Abbildung 46). Da

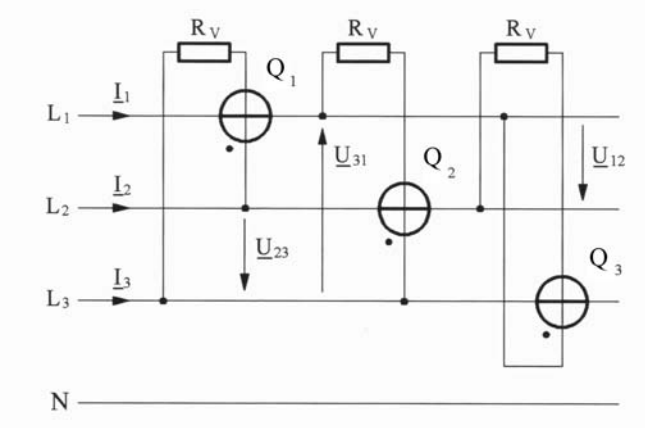

Abbildung 46: Blindleistungsmessung im 4-Leiter-System

die Außenleiterspannungen jedoch um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die Sternspannungen sind, muss der erhaltene Messwert entsprechend korrigiert werden. Es ist auch möglich, geeignet dimensionierte Vorwiderstände R_v in den Spannungspfad zu schalten, so dass eine Umrechnung nicht mehr notwendig ist.

3-Leiter-System Wie bereits bei der Wirkleistungsmessung hergeleitet worden ist, genügen im 3-Leiter-System 2 Wattmeter. Die Spannungspfade der in Abschnitt 6.7.1 verwendeten Aaron-Schaltung wurden dabei an die Außenleiter angeschlossen. Die für die Blindleistungsbestimmung erforderliche Phasenverschiebung erhält man durch

Anschluss der Spannungspfade an einen künstlichen Sternpunkt. Die resultierende Schaltung in Abbildung 47 wird auch als Aaron-Schaltung für Blindleistung bezeichnet. Bei dieser Messung werden nicht die Außenleiterspannungen sondern die um den

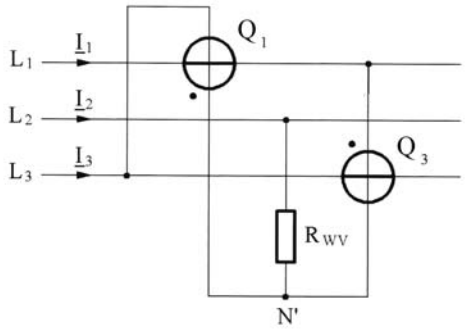

Abbildung 47: Blindleistungsmessung mit abgewandelter Aaron-Schaltung

Faktor $1/\sqrt{3}$ kleineren Sternspannungen gemessen. Daher ist die Summe der abgelesenen Leistungen mit dem Faktor $\sqrt{3}$ zu multiplizieren, um den korrekten Wert für die Blindleistung zu erhalten.

6.7.3 Elektronische Wirkleistungs- und Energiemessung

Die elektromechanischen Verfahren zur Leistungs- und Energiemessung werden mehr und mehr abgelöst durch rein elektronische Verfahren. Da es bei den elektronischen Messsystemen keine bewegten Teile mehr gibt, werden diese auch als *statische* Verfahren bezeichnet.

Die Grundaufgabe eines Wirkleistungsmesssystems besteht in der Multiplikation von momentaner Spannung und momentanem Strom und anschließender Mittelwertbildung. Diese Multiplikation kann durch analoge elektronische oder magnetische Multiplizierschaltungen erfolgen mit nachgeschaltetem Integrator bzw Tiefpassfilter. Hinsichtlich Langzeitstabilität und Dynamikbereich sind diese Verfahren aber nicht optimal.

Durch die Verfügbarkeit leistungsfähiger digitaler Signalprozessoren (DSP) kann die erforderliche Multiplikation digital erfolgen. Blockschaltbild und prinzipielles Anschlussschema eines solchen elektronischen Wattmeters ist in Abbildung 48 und 49 gezeigt. Die aus der Berechnung ermittelten Momentanleistungen werden addiert und eine der Gesamtleistung proportionale Frequenz umgewandelt, die zur Anzeige gebracht werden kann. Zur Messung der Wirkenergie müssen die Impulse in einem Zählwerk oder einem elektronischen Zähler aufsummiert werden.

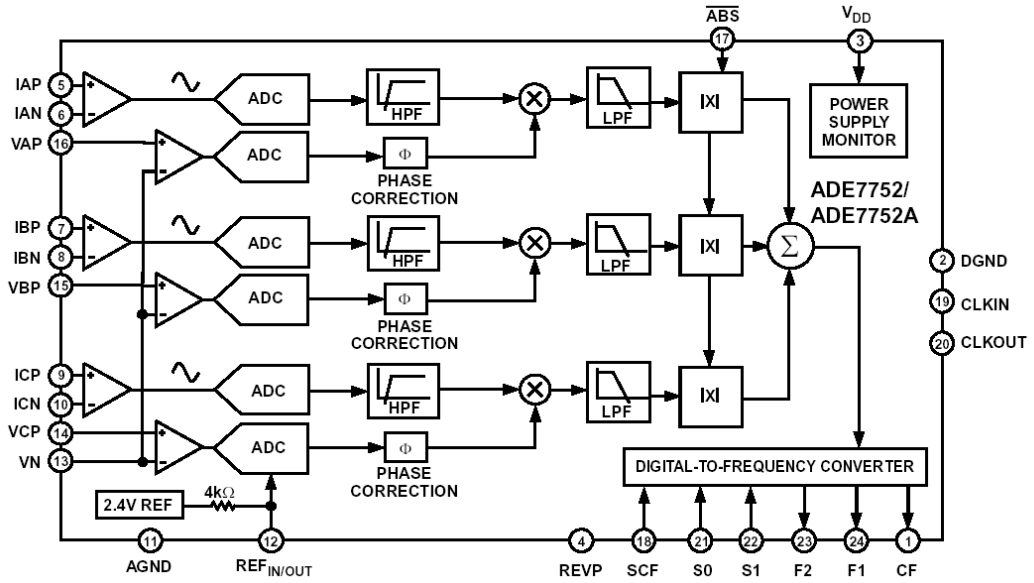

Abbildung 48: Blockschaltbild einer vollelektronischen Wattmeter-Schaltung

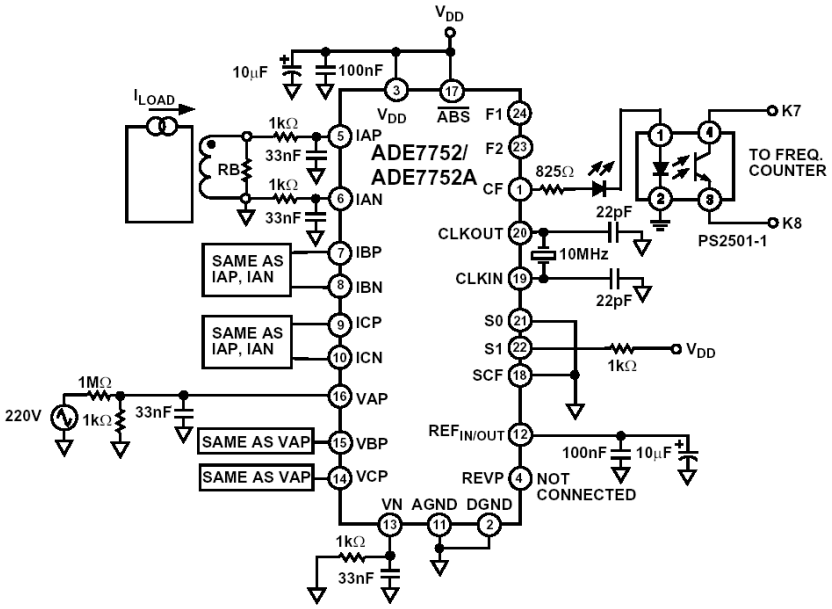

Abbildung 49: Beispiel für Anschlussschema

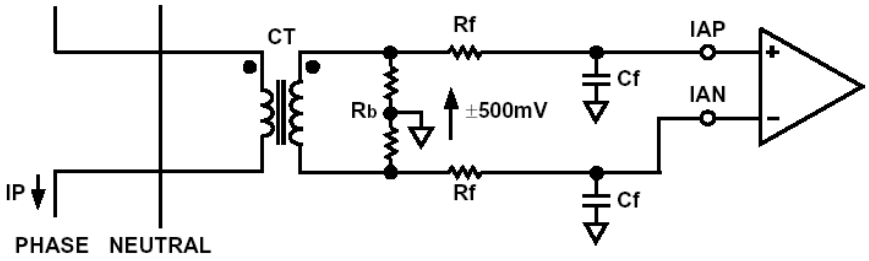

Abbildung 50: Einspeisung des Stromsignals über Stromwandler CT (*current transformer*)

Die Abbildungen 50 und 51 zeigen Details der Signalzuführung.[12]

[12] www.analog.com/UploadedFiles/Data_Sheets/87681923ADE7752_A_c.pdf

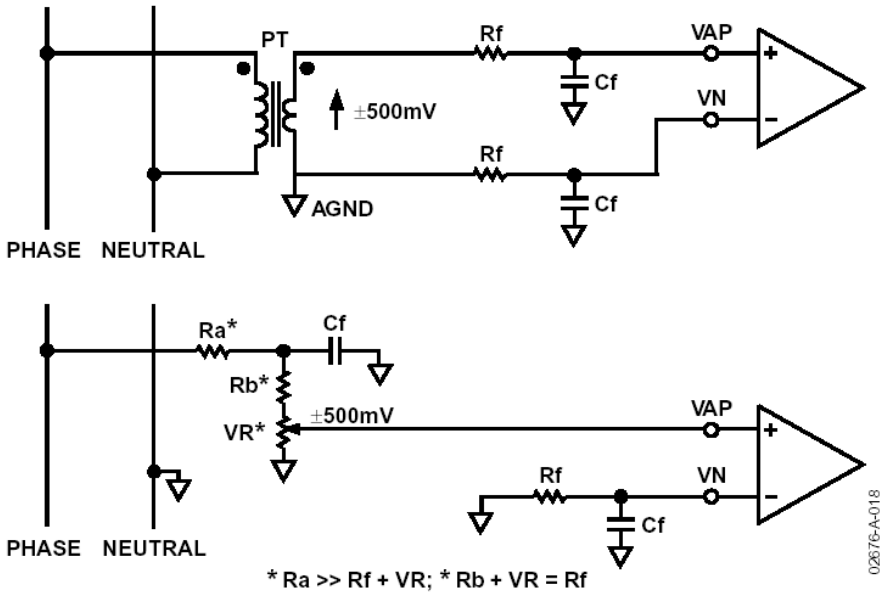

Abbildung 51: Zuführung der Spannung wahlweise galvanisch getrennt über Transformator (PT *potential transformer*) oder mit Widerstandsteiler

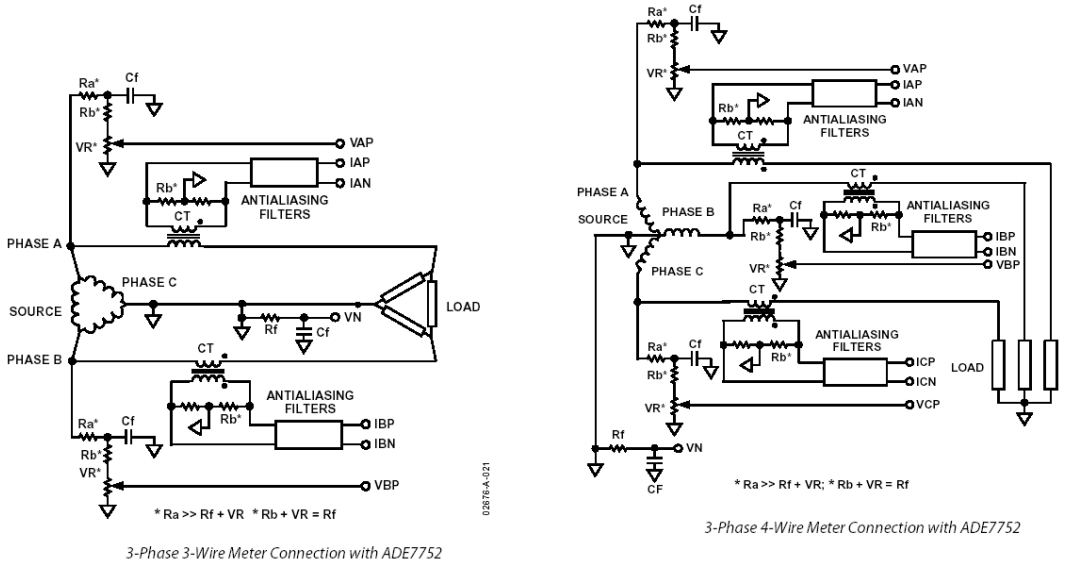

Abbildung 52: Schaltungsbeispiele für elektronische Wirkleistungsmessung: 2-Wattmeter-Schaltung im 3-Leiter-System(links), Schaltung für 3-Leiter-System (rechts)

7 Operationsverstärker in der Messtechnik

Seit jeher ist in der Messtechnik der Einsatz von Messverstärkern notwendig, um schwache Signale anzuheben oder zu konditionieren. Der Entwurf von Messverstärkern wird durch den Einsatz weitgehend standardisierte Schaltungen mit wohldefiniertem Klemmenverhalten vereinfacht. Da diese Verstärkerblöcke ursprünglich in der analogen Rechentechnik verwendet wurden, haben diese heute noch den Namen Operationsverstärker (operational amplifier).

7.1 Eigenschaften von Operationsverstärkern

Grundsätzlich kann der Operationsverstärker als Differenzverstärker aufgefasst werden, der am Ausgang eine der Eingangsspannungsdifferenz proportionale Spannung bereitstellt. Das Schaltsymbol des Operationsverstärker zeigt Abb. 53. Um einen bipolaren Aussteuerbereich zu erhalten, ist auch eine bipolare Spannungsversorgung notwendig.

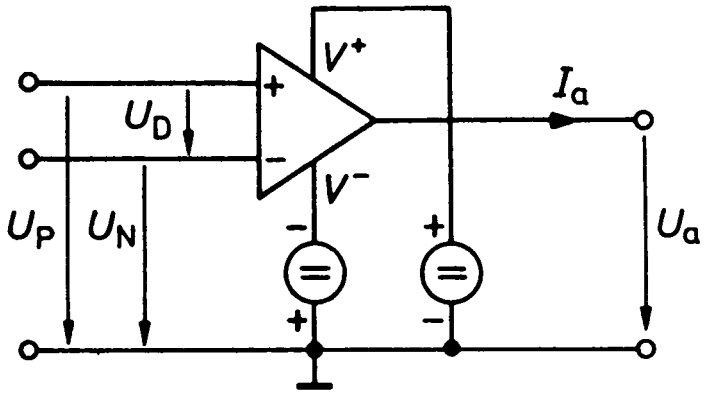

Abbildung 53: Operationsverstärker mit bipolarer Spannungsversorgung

Man unterscheidet den nichtinvertierenden Eingang (P, mit „+“ gekennzeichnet) und den invertierenden Eingang (N, mit „-“ gekennzeichnet).

Die wesentliche Eigenschaft des Operationsverstärkers ist die Verstärkung der an den Eingängen anliegenden Spannungsdifferenz $U_D = U_P - U_N$. Die Kleinsignal-Differenzverstärkung A_D ist in Glg. (135) definiert:

$$A_D = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_D} = \frac{U_a}{\Delta(U_P - U_N)} = \begin{cases} \frac{\Delta U_a}{\Delta U_P} & \text{für} \quad U_N = \text{const.} \\ -\frac{\Delta U_a}{\Delta U_N} & \text{für} \quad U_P = \text{const.} \end{cases} \tag{135}$$

Die maximale bzw. minimale Ausgangsspannung U_{amax}, U_{amin} ist begrenzt durch die positive und negative Betriebsspannung. In der Regel ist der Aussteuerbereich bei Standard-Operationsverstärkern um ca. 1 . . . 3 V geringer als die Betriebsspannung (typabhängig). Der Aussteuerbereich sogenannter *rail to rail*-Operationsverstärker reicht bis auf wenige mV an die Betriebsspannung heran (ebenfalls typabhängig).

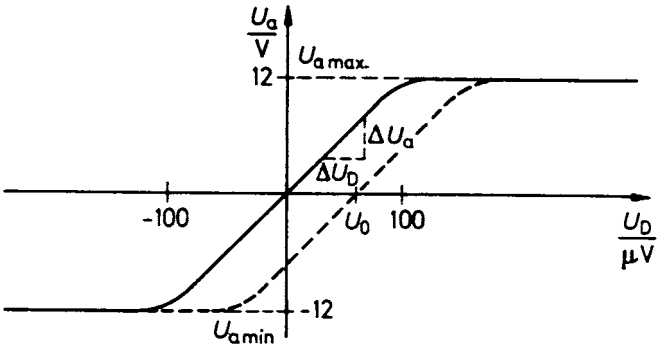

Abbildung 54: Differenzaussteuerung eines idealen Operationsverstärkers (durchgezogene Linie) und eines realen Operationsverstärkers mit Offsetspannung (gestrichelte Linie)

Bei idealen Operationsverstärkern ist bei $U_D = 0$ auch die Ausgangsspannung $U_a = 0$ (vgl. Abb. 54). In der Realität ist die Kennlinie um die sogenannte Offsetspannung U_0 verschoben. U_0 hängt von den Betriebs- und Umgebungsbedingungen des Operationsverstärkers ab:

$$d\,U_0(\vartheta, t, U_b) = \frac{\partial U_0}{\partial \vartheta}\,d\vartheta + \frac{\partial U_0}{\partial t}\,dt + \frac{\partial U_0}{\partial U_b}\,dU_b \tag{136}$$

Die Offsetspannug moderner Operationsverstärker ist häufig so klein, dass man sie vernachlässigen kann. Für Präzisionsanwendungen muss man jedoch die Offsetspannung und deren Drift berücksichtigen.

Neben der Differenzverstärkung A_D ist auch noch die Gleichtaktverstärkung A_{Gl} und die Gleichtaktunterdrückung G wichtig:

$$A_{Gl} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_{Gl}} \tag{137}$$

$$G = \frac{A_D}{A_{Gl}} \quad \textbf{c}\text{ommon }\textbf{m}\text{ode }\textbf{r}\text{ejection }\textbf{r}\text{atio, CMRR} \tag{138}$$

Es ist zu beachten, dass der Gleichtaktaussteuerbereich um einige Volt geringer als die Betriebsspannung sein kann (typabhängig).

Bei Berücksichtigung von Differenz- und Gleichtaktverstärkung sowie der Offsetspannung erhält man schließlich für die Änderung der Ausgangsspannung bzw. für die

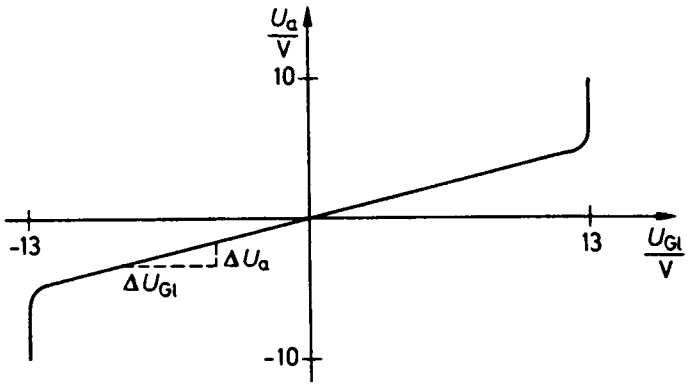

Abbildung 55: Gleichtaktaussteuerung eines Operationsverstärkers

Ausgangsspannung selbst:

$$\Delta U_a = A_D \cdot \Delta U_D + A_{Gl} \cdot \Delta U_{Gl} \tag{139}$$

$$U_a = A_D \left[(U_D - U_0) + \frac{1}{G} U_{Gl} \right] \tag{140}$$

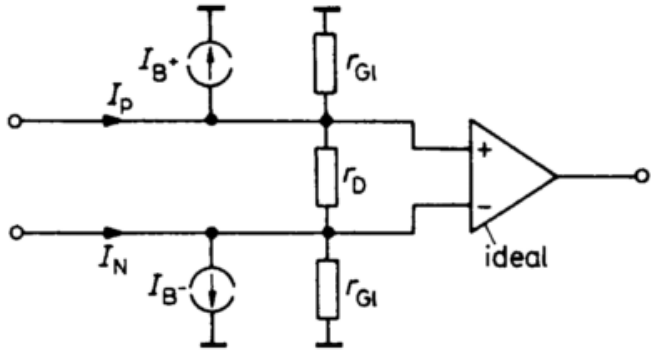

Abbildung 56: Ersatzschaltbild für Operationsverstärker-Eingang

7.2 Verstärkungseinstellung durch Gegenkopplung

Die offene Schleifenverstärkung (open loop gain) beträgt typischerweise $10^4 < A_D < 10^6$ und ist damit sehr hoch. Bereits kleinste Aussteuerungen würden daher den Operationsverstärker ausgangsseitig an die Stellgrenze bringen. In nahezu allen Anwendungen (ausgenommen bei Komparatoren) wird daher das Prinzip der Gegenkopplung verwendet, um die resultierende Verstärkung des Operationsverstärkers durch die Dimensionierung des Rückkopplungsnetzwerkes festzulegen (Abbildung 57).

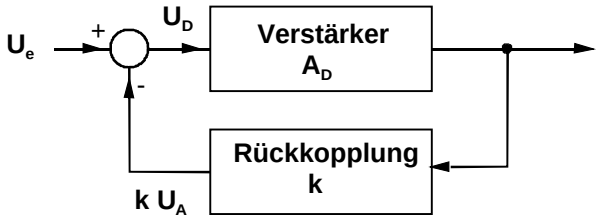

Abbildung 57: Verstärker mit Gegenkopplung

Die Rückführung der Augsgangsspannung U_a auf den Eingang heißt allgemein Gegenkopplung. Bei gegenphasiger Rückführung spricht man von Gegenkopplung, bei gleichphasiger Rückführung von Mitkopplung. Für die Ausgangsspannung U_a der gegengekoppelten Schaltung nach Abbildung 57 gilt:

$$
\begin{aligned}
U_a &= A_D \cdot U_D = A_D\,(U_e - kU_a) \\
&\quad \text{Auflösen nach } U_a \\
U_a &= \frac{A_D U_e}{1 + kA_D} \\
A &= \frac{U_a}{U_e} \quad \text{Verstärkung} \\
A &= \frac{A_D}{1 + kA_D} \qquad (141) \\
g &\quad \text{Schleifenverstärkung} \\
g &= k\,A_D \qquad (142) \\
\text{für} \quad kA_D &\to \infty \\
\Longrightarrow A &\approx \frac{1}{k} \qquad (143)
\end{aligned}
$$

Die kurze Rechnung zeigt, dass durch die Gegenkopplung die Verstärkung praktisch nur noch durch den Faktor k des Rückkopplungsnetwerks gegeben ist, wenn die Schleifenverstärkung $g \gg 1$, d. h. der Rückkopplungsfaktor k darf nicht zu klein gewählt werden.

Den gegengekoppelten Operationsverstärker kann man sich auch als einfachen Regelkreis vorstellen: Der Operationsverstärker versucht, die Differenzspannung U_D an seinem Eingang auf einen möglichst kleinen Wert zu regeln (idealerweise auf Null). Dies gelingt umso besser, je größer g ist.

Die Gegenkopplung hat auch Auswirkungen auf den Frequenzgang der Verstärkung. Grundsätzlich nimmt die Verstärkung oberhalb der - 3dB - Grenzfrequenz f_{gA} um - 20 dB pro Dekade ab (wie Tiefpass 1. Ordnung). Bei der sogenannten Transitfrequenz f_T (*transit frequency, unity gain bandwidth*) gilt $|A_D(f_{gA})| = 1 \triangleq 0$ dB. Es gilt:

$$|A_D(f_g)| \cdot f_g \;=\; A_D\, f_{gA} \;=\; f_T \tag{144}$$

Gemäß Gleichung 144 ist somit das Produkt aus Verstärkung und Bandbreite konstant und gleich der Transitfrequenz des betrachtetetn Operationsverstärkers. Man benutzt daher auch für f_T den Begriff Verstärkungs-Bandbreiten-Produkt (*gain bandwidth product*).

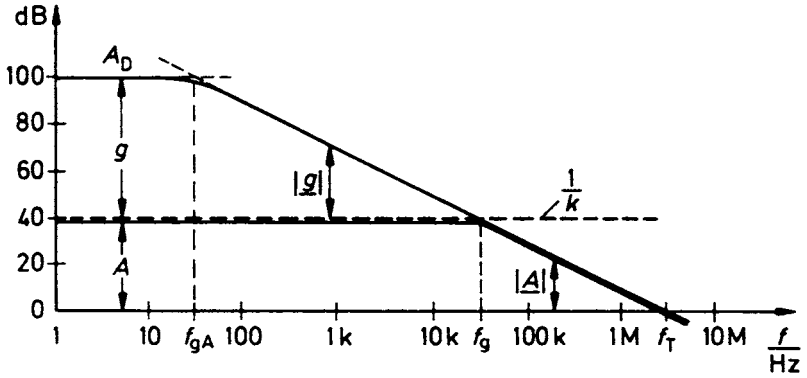

Abbildung 58: Frequenzgang der Kleinsignalverstärkung mit und ohne Gegenkopplung

Wird die Verstärkung durch Gegenkopplung reduziert, so erhöht sich im gleichen Maße die Grenzfrequenz der eingestellten Verstärkung.

7.3 Interner Aufbau

Integrierte Standard-Operationsverstärker weisen eine Reihe von Gemeinsamkeiten auf. Exemplarisch soll hier der Prinzipaufbau eines typischen, universell einsetzbaren Operationsverstärkers vorgestellt werden.

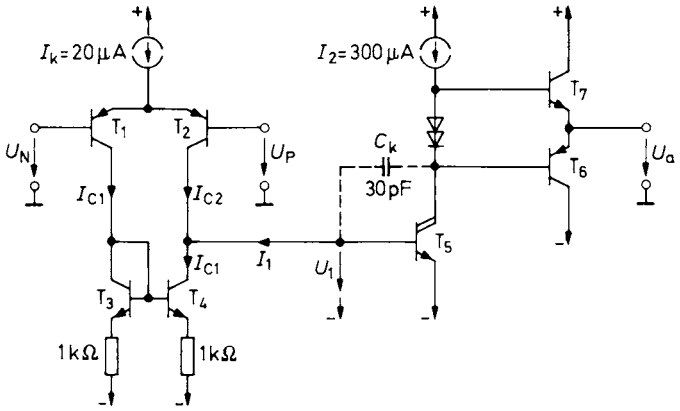

Abbildung 59: Prinzipieller Aufbau eines Standard-Operationsverstärker (ähnlich uA741)

Eingangsseitig sitzt der Differenzverstärker T_1, T_2, gespeist durch die Stromquelle I_k. Die Transistoren T_3, T_4 bilden einen sogenannten Stromspiegel. Dadurch wird bewirkt, dass die Kollektorströme in T_3 und T_4 gleich sind. Im kollektorseitigen Knoten von T_2 erfolgt die eigentliche Differenzbildung durch Strombilanzierung. Der Differenzstrom I_1 lädt die Kapazität C_k und stellt dadurch die Eingangsspannung für den Darlingtontransistor T_5 dar. T_5 wird in Emitterschaltung betrieben und weist durch den hochohmigen Kollektorwiderstand (Innenwiderstand der Stromquelle I_2) eine sehr hohe Spannungsverstärkung auf. T_7, T_8 stellen eine Komplementär-Gegentaktstufe in AB-Betrieb dar.

Der Kondensator C_k beeinflusst maßgeblich die Wechselspannungseigenschaften des Operationsverstärkers. Je kleiner C_k gewählt wird, desto höher ist die Transitfrequenz (Kleinsignalbandbreite) und die slew rate (Großsignalbandbreite).

Mit dem Begriff slew rate bezeichnet man die Anstiegsgeschwindigkeit der Ausgangsspannung U_a des Operationsverstärkers. Für sinusförmige Aussteuerung gilt:

$$U_a(t) = \hat{u}_a \cdot \sin(2\pi f t) \tag{145}$$

$$\frac{dU_a(t)}{dt} = 2\pi f \cdot \hat{u}_a \cdot \cos(2\pi f t) \tag{146}$$

$$\frac{dU_a(t)}{dt}|_{max} = 2\pi f \cdot \hat{u}_a \tag{147}$$

Andererseits kann sich die Ausgangsspannung nicht schneller ändern, als der Kondensator C_k durch I_k umgeladen wird:

$$\frac{dU_a(t)}{dt}|_{max} = \frac{I_k}{C_k} = SR \qquad \text{(slew rate)} \tag{148}$$

$$\Longrightarrow f \cdot \hat{u}_a \leq \frac{SR}{2\pi} \tag{149}$$

In Worten ausgedrückt: das Produkt aus dem Scheitelwert und der Frequenz der Ausgangsspannung kann maximal den Wert $SR/(2\pi)$ annehmen. Drückt man $\hat{u}_a$ als Funktion der Frequenz aus, so erhält man:

$$\hat{u}_a = \frac{SR}{2\pi f} \tag{150}$$

Dieser Zusammenhang wird auch als Großsignalbandbreite (large signal frequency response) bezeichnet und ist in Abbildung 60 dargestellt ($V_{pp} = \hat{u}_a$).

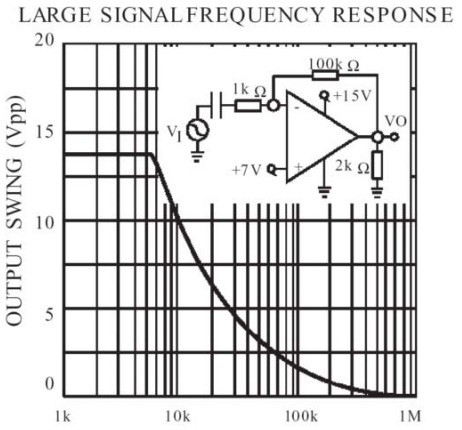

Abbildung 60: Großsignal-Bandbreite

7.4 Frequenzgangkompensation

Jedes rückgekoppelte System kann selbsterregte Schwingungen bei der Frequenz f_k ausführen, wenn bei einem kompletten Schleifenumlauf (Abbildung 57 auf Seite 68) die Spannung mit Phasenverschiebung 0 und ausreichender Amplitude rückgeführt wird.

Bezogen auf die Verhältnisse beim gegengekoppelten Operationsverstärker mit Subtraktion des rückgekoppelten Signals (entspricht Phasendrehung um $-180°$) gilt:

$$g(f_k) = 1 \quad (151)$$
$$\varphi(f_k) = -180° \quad (152)$$

Im Fall $g(f_k) = 1$ stellt sich eine stationäre Schwingung der Frequenz f_k mit konstanter Amplitude ein, für $g > 1$ wächst die Amplitude exponentiell bis zur Begrenzung durch den Operationsverstärker. Für den praktischen Betrieb ist ein ausreichender Sicherheitsabstand zu den Bedingungen nach Glg. (151,152) notwendig. Üblicherweise wird dazu die Phasendifferenz zur kritischen Phase φ_k betrachtet. Diese Phasendifferenz wird als *Phasenreserve* oder *Phasenrand* (phase margin) bezeichnet:

$$\alpha = 180° - |\varphi(f_k)| \quad (153)$$
$$\alpha_{min} = 65° \quad (154)$$

Abbildung 61 zeigt das Bode-Diagramm mit und ohne Frequenzgangkorrektur.

Ohne Frequenzgangkorrektur ergibt sich bei der kritischen Phase $\varphi_k = -180°$ im unkorrigierten Fall die offene Schleifenverstärkung $|A_{Du}| \approx 300$. Die Schleifenverstärkung mit Gegenkopplung beträgt $g_u = k|A_{Du}|$. Wird k zu groß gewählt, kann g_u den Wert 1 erreichen oder sogar übersteigen, so dass die Oszillationsbedingung erfüllt ist.

Mit Frequenzgangkorrektur beträgt bei der Transitfrequenz f_T die offene Schleifenverstärkung $A_{Dk}(f_T) = 1$ die Phasenverschiebung $\varphi(f_T) = -115°$, was zu einer Phasenreserve von $65°$ führt. Ein so kompensierter Operationsverstärker schwingt auch bei der maximal möglichen Schleifenverstärkung $g_{max}(f_T) = 1 \cdot |A_{Dk}(f_T)| = A_{Dk}(f_T) = 1$ nicht. Es ist zwar die Amplitudenbedingung Gleichung 151 erfüllt, nicht aber die Phasenbedingung Gleichung 152.

Die beschriebene Frequenzgangkorrektur erfolgt durch Wahl des Kondensators C_k, der entweder im Operationsverstärker integriert sein kann (intern kompensiert) oder extern beschaltet werden muss (extern kompensiert). Je nach geforderter Verstärkung $A \approx 1/k$ ist darauf zu achten, dass der Operationsverstärker stabil arbeitet. Bei intern kompensierten Operationsverstärkern findet man häufig die Angabe, für welche minimale Verstärkung die Kompensation ausgelegt ist. (z. B. „unity gain stable“ bedeutet stabil für $A = k = 1$).

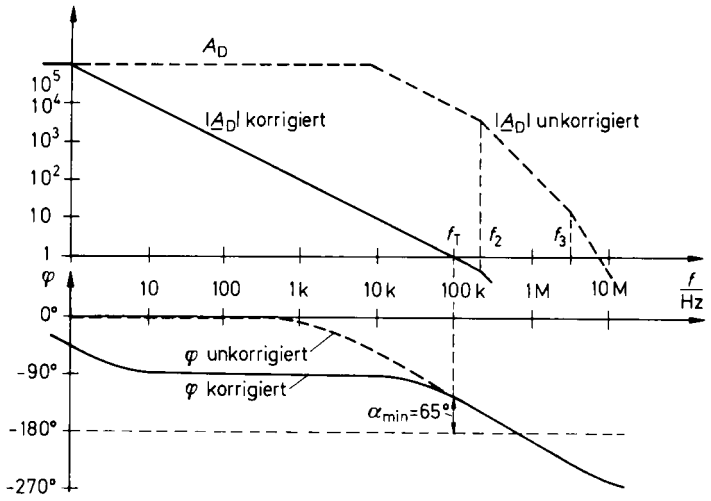

Abbildung 61: Bode-Diagramm für Operationsverstärker ohne Frequenzgangkorrektur (gestrichelte Linien) und mit Frequenzgangkorrektur (durchgezogene Linien)

Die Frequenzgangkorrektur beeinflusst auch die Reaktion der Schaltung auf Sprünge der Eingangsspannung (Sprungantwort). Je größer die Phasenreserve, desto träger reagiert das System. Eine Phasenreserve von 65° stellt hierbei einen brauchbaren Kompromiss zwischen Einstellgeschwindigkeit und Überschwingweite dar (Abbildung 62).

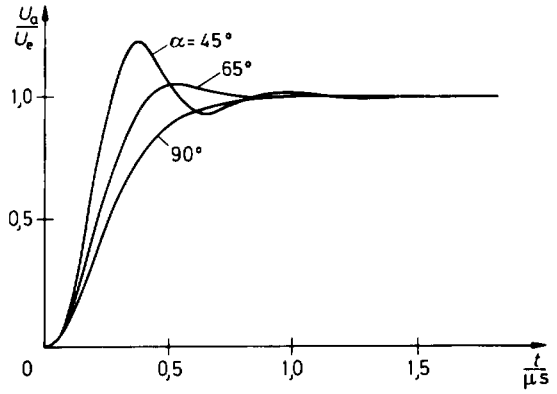

Abbildung 62: Sprungantwort für unterschiedliche Phasenreserven

7.5 Vergleich typischer Daten

Die Typenvielfalt von Operationsverstärkern ist enorm. Der Anwender muss für den jeweiligen Verwendungszweck die wesentlichen Eigenschaften spezifizieren und anhand der Daten einen oder mehrere geeignete Typen auswählen. Dabei helfen die Internetseiten der Hersteller durch Suchfunktionen, bei denen gezielt Parameter der Operationsverstärker eingegeben werden können. Die folgende Tabelle 5 gibt einen kleinen Einblick in die Bandbreite der Parameter.

Parameter	Symbol	Standardverstärker		Spezialverstärker	
		µA741 (bipolar)	TL051 (Fet)	OP177 (präzise)	EL2038 (schnell)
Differenzverstärkung	A_D	10^5	$2 \cdot 10^5$	**10^7**	$2 \cdot 10^4$
Gleichtaktunterdrückung	G	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	10^7	$3 \cdot 10^4$
Differenzeingangswiderstand	r_D	$10^6\,\Omega$	**$10^{12}\,\Omega$**	$5 \cdot 10^7\,\Omega$	$10^4\,\Omega$
Gleichtakteingangswiderstand	r_{Gl}	$10^9\,\Omega$	**$10^{14}\,\Omega$**	$2 \cdot 10^{11}\,\Omega$	$10^7\,\Omega$
Eingangsruhestrom	I_B	80 nA	**5 pA**	1 nA	5 µA
Offsetspannung	U_0	1 mV	0,5 mV	**10 µV**	0,5 mV
Offsetspannungsdrift	$\Delta U_0/\Delta\vartheta$	6 µV/K	10 µV/K	**0,1 µV/K**	20 µV/K
Gleichtaktaussteuerbarkeit	$U_{Gl\,max}$	±13 V	+14,5 V −12 V	±13 V	±12 V
Ausgangsaussteuerbarkeit	$U_{a\,max}$	±13 V	±13 V	±14 V	±12 V
Maximaler Ausgangsstrom	$I_{a\,max}$	±20 mA	±20 mA	±20 mA	**±50 mA**
Ausgangswiderstand	r_a	1 kΩ	100 Ω	60 Ω	30 Ω
Betriebsstromaufnahme	I_b	1,7 mA	1,4 mA	1,6 mA	13 mA
3 dB-Bandbreite	f_{gA}	10 Hz	30 Hz	0,06 Hz	**50 kHz**
Verstärkungs-Bandbreite-Produkt	f_T	1 MHz	3 MHz	0,6 MHz	**1 GHz**
Slew rate	dU_a/dt	0,6 V/µs	18 V/µs	0,3 V/µs	**1000 V/µs**
Leistungsbandbreite	f_P	10 kHz	290 kHz	5 kHz	**16 MHz**

Tabelle 5: Operationsverstärkerdaten im Vergleich

7.6 Nichtinvertierender Verstärker

Die einfachste Realisierung der Gegenkopplung besteht in der Rückführung der Ausgangsspannung über einen Ohmschen Spannungsteiler, wie in Abbildung 63 gezeigt.

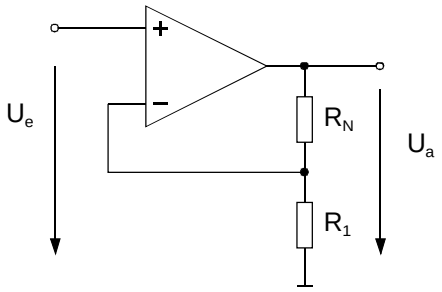

Abbildung 63: Nichtinvertierender Operationsverstärker

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{R_1}{R_1 + R_N} \\
A &= \frac{A_D}{1 + kA_D} \left(1 + \frac{1}{G}\right) \\
\text{für} \quad G &\to \infty \quad \text{(idealer Operationsverstärker)} \\
\Longrightarrow \quad A &= \frac{A_D}{1 + kA_D} \qquad (155) \\
A &\approx 1 + \frac{R_N}{R_1} \quad \text{wenn} \quad g = kA_D \to \infty \qquad (156)
\end{aligned}
$$

Durch die Gegenkopplung werden auch die wirksamen Ein- und Ausgangswiderstände positiv beeinflusst.

$$
\begin{aligned}
r'_e &\qquad \text{wirksamer Eingangswiderstand} \\
r'_e &= \frac{\Delta U_e}{\Delta I_e} = (g\, r_D) \parallel r_{Gl} \qquad (157) \\
r'_a &\qquad \text{wirksamer Ausgangswiderstand} \\
r'_a &= -\frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} = \frac{r_a}{1 + kA_D} \approx \frac{r_a}{g} \qquad (158) \\
& \qquad (159)
\end{aligned}
$$

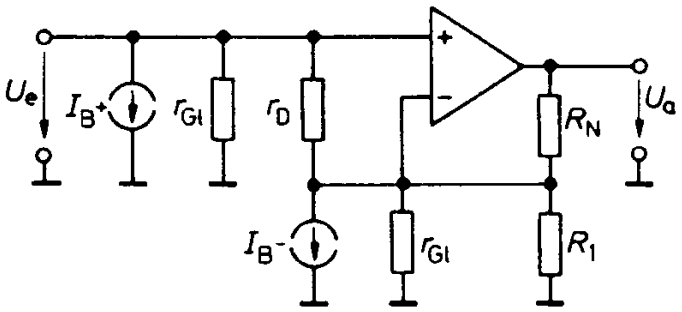

Abbildung 64: Ersatzschaltbild mit Gegenkopplung

7.7 Invertierender Verstärker

Eine andere Möglichkeit der Gegenkopplung zeigt die Abbildung 65 auf der nächsten Seite.

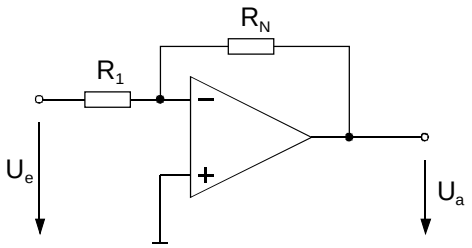

Abbildung 65: Invertierender Verstärker

Die am N-Eingang anliegende Spannung U_N wird mit A_D verstärkt:

$$\begin{aligned} U_a &= -A_D \cdot U_N \\ A &= \frac{U_a}{U_e} = -(1-k)\,\frac{A_D}{1+kA_D} \\ \text{mit} \quad k &= \frac{R_1}{R_1+R_N} \\ \text{wenn} \quad g &= kA_D \gg 1 \\ \Longrightarrow \quad A &= -\frac{R_N}{R_1} \end{aligned} \tag{160}$$

Da $U_N \approx 0$, nennt man den Knoten am N-Eingang auch *virtuelle Masse*. Für den Eingangswiderstand kann man daher unmittelbar $r_e = R_1$ ablesen.

7.8 Umkehrsummierer

Häufig besteht die Notwendigkeit, Spannungen zu addieren, z. B. um Pegel zu verschieben (Offsetkorrektur etc.). Dazu kann eine Schaltung verwendet werden, die vom invertierenden Verstärker abgeleitet ist.

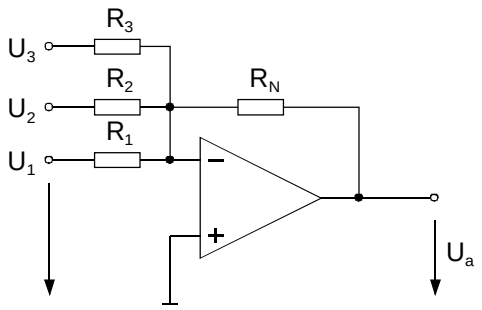

Abbildung 66: Umkehrsummierer

Als Ausgangsspannung U_a ergibt sich die gewichtete Summe der Eingangsspannungen. Wegen der Vorzeichenumkehr spricht man von einem Umkehrsummierer.

$$U_a = -\left(\frac{R_N}{R_1}\,U_1 + \frac{R_N}{R_2}\,U_2 + \frac{R_N}{R_3}\,U_3\right) \tag{161}$$

7.9 Subtrahierer

Für die Subtraktion zweier Spannungen kann im einfachsten Fall eine Schaltung mit einem Operationsverstärker verwendet werden, die im Prinzip gleichzeitig als invertierender Verstärker und als nichtinvertierender Verstärker mit vorgeschaltetem Spannungsteiler betrachtet werden kann (Abbildung 67 auf der nächsten Seite).

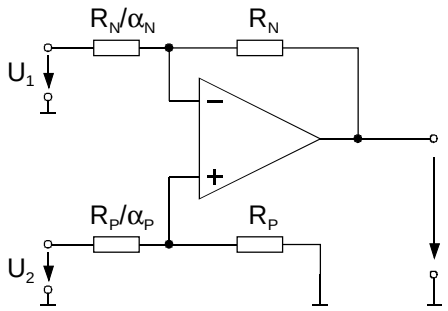

Abbildung 67: Subtrahierer

Die Abhängigkeit der Ausgangsspannung U_a von den Eingangsspannungen kann mit Hilfe des Superpositionsprinzips hergeleitet werden:

$$U_a = \left(\frac{1+\alpha_N}{1+\alpha_P}\right) \alpha_P \; U_2 \; - \; \alpha_N \; U_1 \tag{162}$$

$$\text{Spezialfall} \quad \alpha = \alpha_N = \alpha_P \tag{163}$$

$$\Longrightarrow U_a = \alpha \, (U_2 - U_1) \tag{164}$$

Mit Hilfe des Widerstandsverhältnisses α kann die Differenzverstärkung des Subtrahierers festgelegt werden. Um die Bedingung der Glg. 163 zu erfüllen, müssen die verwendeten Widerstände exakt den berechneten Werten entsprechen, d. h. eine Toleranz von 0 aufweisen. Dies ist in der Praxis nur durch Einfügen eines veränderlichen Widerstands und entsprechenden Abgleich zu realisieren.

Berücksichtigt man die Toleranz der Widerstände, d. h. nimmt man an, dass die Widerstandsverhältnisse um einen Sollwert α geringfügig nach oben bzw. unten abweichen, so kann man zweckmäßigerweise definieren:

$$\alpha_N = \alpha - \frac{1}{2}\Delta\alpha \tag{165}$$

$$\alpha_P = \alpha + \frac{1}{2}\Delta\alpha \tag{166}$$

Man erhält dann keine exakte Proportionalität zur Differenz der Eingangsspannungen, sondern der Ausgangsspannung ist noch eine Fehlerspannung überlagert, die vom Mittelwert der Eingangsspannungen herrührt. Für die resultierende Gleichtaktunterdrückung G kann man schreiben:

$$G = (1+\alpha)\,\frac{\alpha}{\Delta\alpha} \tag{167}$$

Dabei ist $\frac{\alpha}{\Delta\alpha}$ der Kehrwert der Widerstandstoleranz. Je größer die Toleranz, desto schlechter ist die Gleichtaktunterdrückung.

7.10 Instrumentenverstärker

Zur Verstärkung von Signalen aus hochohmigen Quellen ist es notwendig, dem Subtrahierer aus Abschnitt 7.9 Impedanzwandler vorzuschalten. Man erhält dann die Grundschaltung des sogenannten Instrumentenverstärkers (*instrumentation amplifier*). Wegen der Elektrometerverstärker (Impedanzwandler) am Eingang nennt man diese Schaltung auch Elektrometersubtrahierer. Die Verstärkung kann durch Variation des

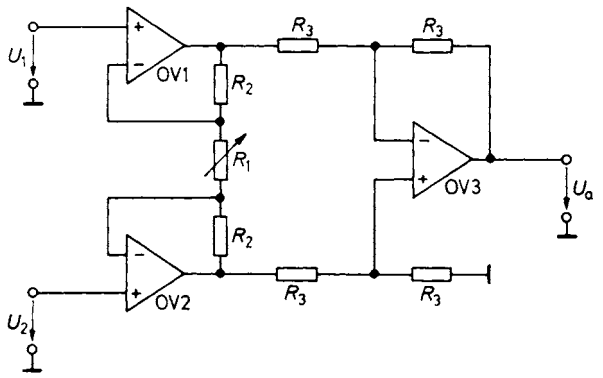

Abbildung 68: Instrumentenverstärker (Elektrometersubtrahierer)

Widerstands R_1 eingestellt werden. Für die Ausgangsspannung U_a und die Gleichtaktunterdrückung G ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$U_a = \left(1+\frac{2\,R_2}{R_1}\right)\,(U_2-U_1); \tag{168}$$

$$G = \left(1+\frac{2\,R_2}{R_1}\right)\,\frac{2\alpha}{\Delta\alpha} \tag{169}$$

Die Widerstände R_3 sollten für optimale Gleichtaktunterdrückung exakt gleich sein, d. h. $\Delta\alpha = 0$. In der Fertigung integrierter Instrumentenverstärker werden die Widerstände in der Regel durch Laser abgeglichen, so dass G maximal wird.

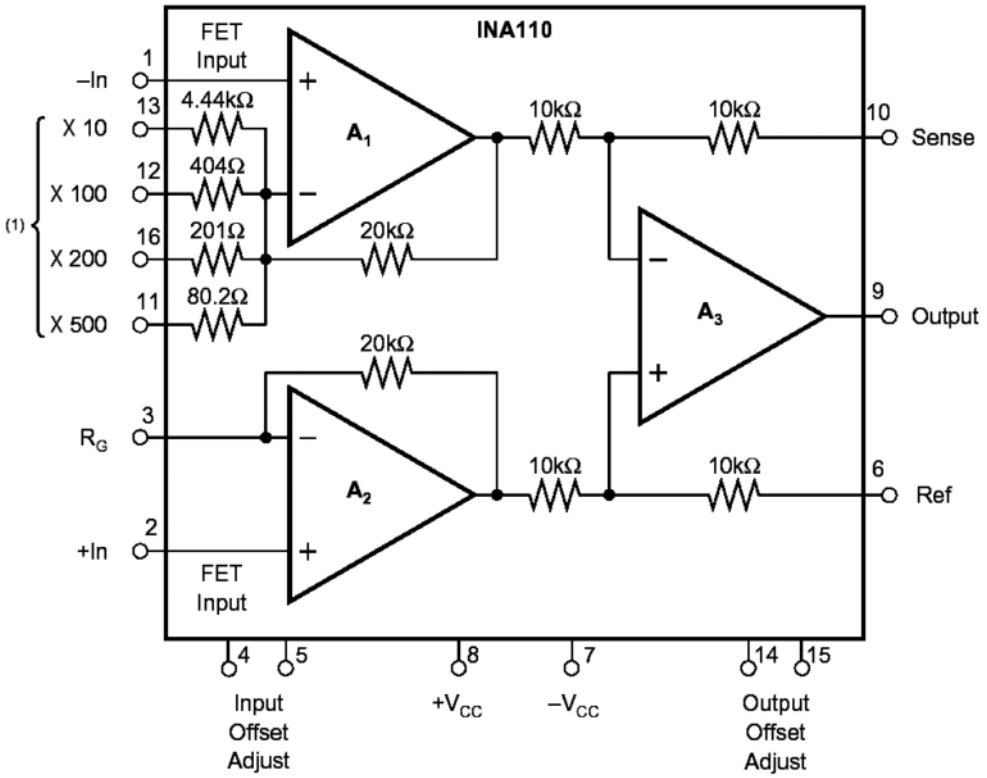

Abbildung 69: Beispiel für integrierten Instrumentenverstärker mit programmierbarer Verstärkung

7.11 Umkehrintegrator

Ersetzt man den Widerstand R_N des invertierenden Verstärkers (Abschitt 7.7 auf Seite 75 durch einen Kondensator, so erhält man eine Schaltung, die das Integral der Eingangsspannung liefert.

$$\begin{aligned} U_a(t) &= -\frac{1}{RC}\int_0^t U_e(t')dt' + U_{a0} \qquad (170)\\ \text{mit} \quad U_{a0} &= U_a(t=0) \end{aligned}$$

Der Integrator hat ein „Gedächtnis“ für zurückliegende Spannungswerte. Daher ist die Anfangsbedingung U_{a0} durch die auf dem Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$ befindliche Ladung $Q_0 = C\,U_{a0}$ gegebeben. Wegen des negativen Vorzeichens in Glg. 170 lautet die korrekte Bezeichnung Umkehrintegrator.

Betrachtet man das Übertragungsverhalten im Frequenzraum, so wird die Verstärkung

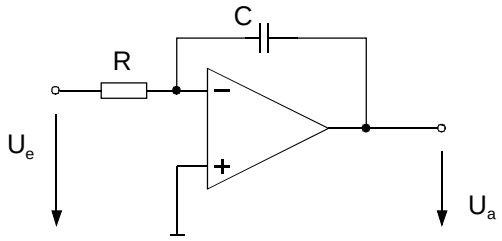

Abbildung 70: Umkehrintegrator

wegen des komplexen Widerstands des Kondensators komplex. Für die Verstärkung $\underline{A}(\omega)$ bzw. den Betrag der Verstärkung $|\underline{A}(\omega)|$ erhält man:

$$\underline{A}(\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -j\,\frac{1}{\omega RC} \tag{171}$$

$$|\underline{A}(\omega)| = \left|\frac{\underline{Z}_C}{R}\right| = \frac{1}{\omega RC} \tag{172}$$

Der Frequenzgang ist typisch für einen Tiefpass 1. Ordnung.

Bei der praktischen Realisierung ist zu beachten, dass bei $\omega \to 0$ der Gegenkopplungswiderstand $|Z_C \to \infty$. Natürlich wird die Verstärkung nicht wirklich unendlich groß, sondern ist durch die offene Schleifenverstärkung A_D des Operationsverstärkers begrenzt. Bereits kleinste Fehlereinflüsse durch Offsetspannung oder Eingangruhestrom werden durch einen sehr hohen Faktor verstärkt. In der Praxis sollte daher ein hochohmiger Widerstand R_p parallel zu C geschaltet werden, der die Gleichspannungsverstärkung auf das notwendige Maß begrenzt.

Der Eingangsruhestrom I_B des Operationsverstärkers wiederum führt auch bei einer Eingangsspanung $U_e = 0$ zu einem „Weglaufen“ der Ausgangsspannung, da der Kondensator durch I_B umgeladen wird. Für Integratoranwendungen sollten daher Präzisionsverstärker mit niedriger Offsetspannung und geringem Eingangsruhestrom verwendet werden.

7.12 Komparatoren und Schmitt-Trigger

Für viele Anwendungen in der Mess- und Regelungstechnik muss bei Erreichen eines bestimmten Schwellwertes eine Aktion ausgeführt werden. Dazu kann im einfachsten Fall ein Operationsverstärker ohne Gegenkopplung verwendet werden.

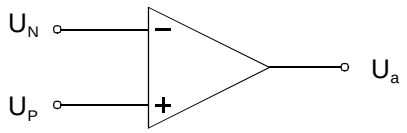

Abbildung 71: Operationsverstärker als Komparator

Komparator Für $U_P > U_N$ fährt die Ausgangsspannung auf $U_a = U_{amax}$, für $U_P < U_N$ entsprechend auf $U_a = U_{amin}$. Damit ist also ein einfacher Schwellwertschalter zu realisieren. Nachteilig ist jedoch, dass bereits kleinste Änderungen der Eingangsspannung im Bereich der Schaltschwelle zum Schalten führen. Gerade bei langsam veränderlichen oder verrauschten Signalen ist dies eher unerwünscht, da die Ausgangsspannung unnötig hin- und herspringt.

Abhilfe schafft eine Verschiebung der Schaltschwelle in Abhängigkeit vom Ausgangszustand, wobei man hier eine gleichphasige Rückkopplung, d. h. eine Mitkopplung der Ausgangsspannung auf den Eingang wählt. Eine solche Schaltung nennt man Schmitt-Trigger.

Invertierender Schmitt-Trigger Über den Spannungsteiler R_1, R_2 wird ein Teil der Ausgangsspannung U_a auf den nichtinvertierenden Eingang zurückgeführt. Dadurch wird die Schaltschwelle in Abhängigkeit von U_a verändert.

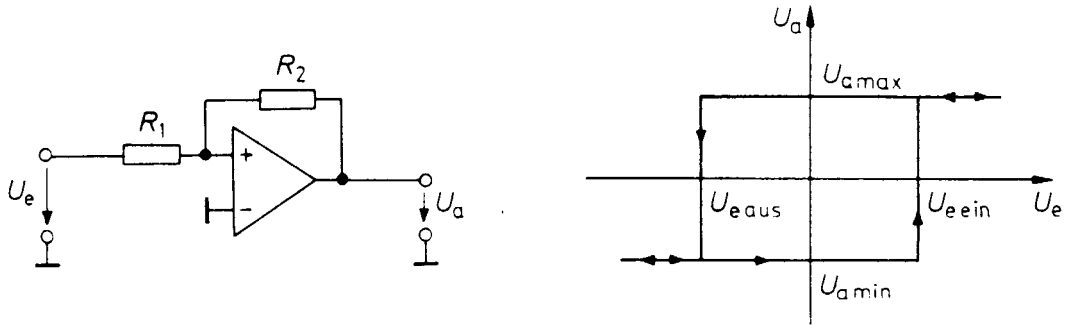

Abbildung 72: Invertierender Schmitt-Trigger

Bezeichnet man als Zustand „ein“ die maximal mögliche Ausgangsspannung U_{amax} und als Zustand „aus“ die minimal mögliche Ausgangsspannung U_{amin} so erhält man

für die zugehörigen Einschalt- bzw. Ausschaltschwelle:

$$\text{Einschaltschwelle} \quad U_{eein} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,U_{amin} \tag{173}$$

$$\text{Ausschaltschwelle} \quad U_{eaus} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,U_{amax} \tag{174}$$

$$\text{Schalthysterese} \quad \Delta U_e = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,(U_{amax}-U_{amin}) \tag{175}$$

Damit der Schmitt-Trigger tatsächlich sauber zwischen den beiden Zuständen U_{amax} und U_{amin} hin- und herspringt (Bistabilität), muss die Schleifenverstärkung g größer als 1 sein:

$$g = \frac{A_D\,R_1}{R_1+R_2} > 1 \tag{176}$$

Eine wichtige Anwendung ist die Erzeugung eines rechteckigen Spannungsverlaufs aus einer beliebigen Kurvernform der Eingangsspannung.

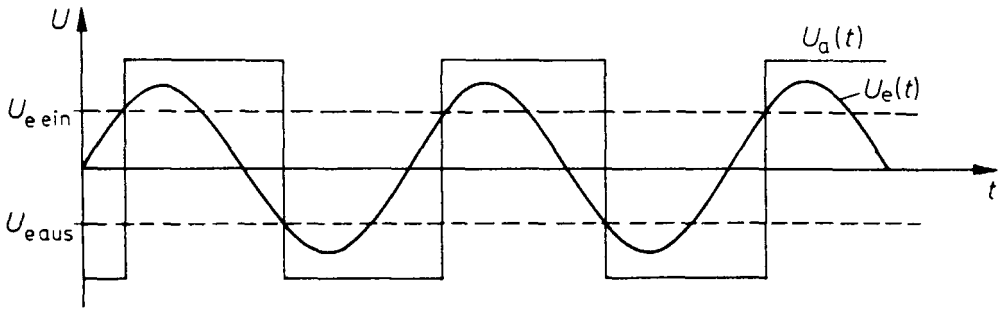

Abbildung 73: Spannungsverlauf beim invertierenden Schmitt-Trigger

Nicht-invertierender Schmitt-Trigger Beim nicht-invertierenden Schmitt-Trigger liegt der Spannungsteiler R_1, R_2 zwischen Eingang und Ausgang. Die Ausgangsspannung ändert sich immer dann, wenn die Spannung am nichtinvertierenden Eingang einen Nulldurchgang aufweist. Wird der invertierende Eingang nicht auf Bezugspotential sondern auf ein anderes Potential gelegt, kann dadurch der Schaltpunkt auch verschoben werden.

$$\text{Einschaltschwelle} \quad U_{eein} = -\frac{R_1}{R_2}\,U_{amin} \tag{177}$$

$$\text{Ausschaltschwelle} \quad U_{eaus} = -\frac{R_1}{R_2}\,U_{amax} \tag{178}$$

$$\text{Schalthysterese} \quad \Delta U_e = \frac{R_1}{R_2}\,(U_{amax}-U_{amin}) \tag{179}$$

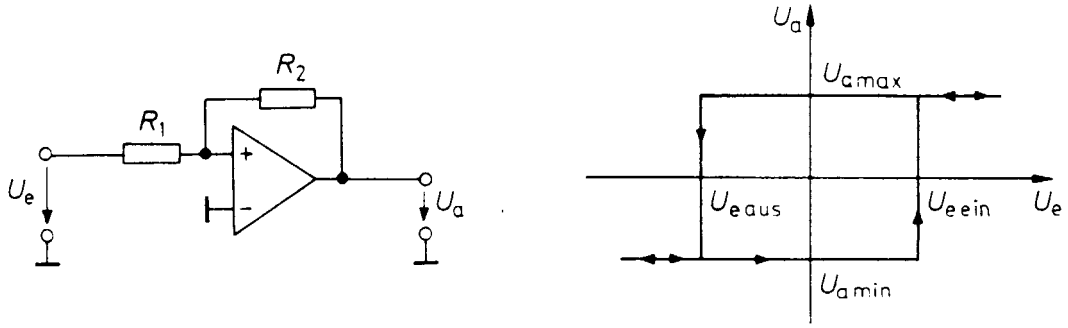

Abbildung 74: Nicht-invertierender Schmitt-Trigger

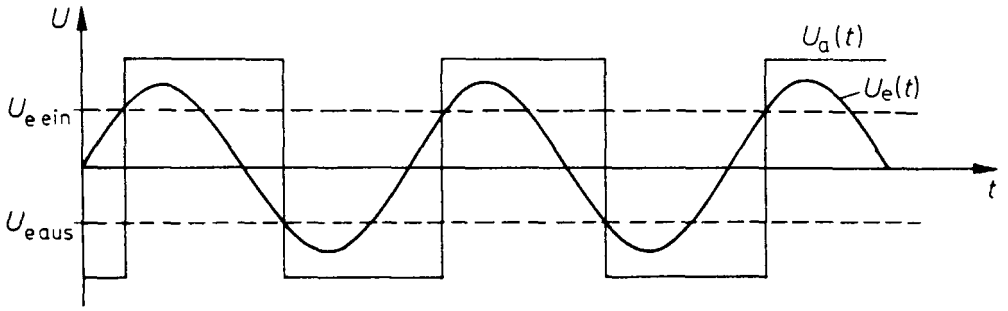

Abbildung 75: Spannungsverlauf beim nicht-invertierenden Schmitt-Trigger

7.13 Gleichrichterschaltungen

Für einfache Gleichrichterschaltungen werden üblicherweise Halbleiterdioden verwendet. Bei den bereits in Abschnitt 6.2 behandelten Diodenschaltungen ist allerdings immer der Spannungsabfall. Dieser Fehler fällt umso stärker ins Gewicht, je kleiner die zu messenden Spannungen sind. Mit Hilfe von gegengekoppelten Operationsverstärkern ist es möglich, den Fehlereinfluss der Diode zu kompensieren.

7.13.1 Betragsmittelwert

Der Betragsmittelwert (Gleichrichtwert) einer Wechselspannung kann durch eine Vollweggleichrichtung mit anschließender Mittelwertbildung erfolgen. Bei Verwendung eines Mittelwert bildenden Instruments könnte die Schaltung in Abbildung 76 verwendet werden.

Der Operationsverstärker liefert einen Ausgangsstrom I_A in der Höhe, dass immer die

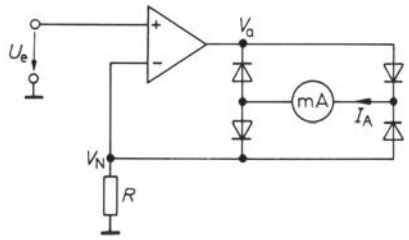

Abbildung 76: Vollweggleichrichter für potentialfreies Anzeigeinstrument

Bedingung $U_e = I_A \cdot R$ erfüllt ist. Wegen der Diodenbrücke fließt der Strom im Instrument immer in der gleichen Richtung. Es gilt daher:

$$I_A = \frac{|U_e|}{R} \tag{180}$$

Soll eine auf Massepotential bezogene Spannung $U_a = |U_e|$ zur Verfügung stehen, ist die Schaltung in Abbildung 76 nicht geeignet sondern man verwendet eine Schaltung nach Abbildung 77.

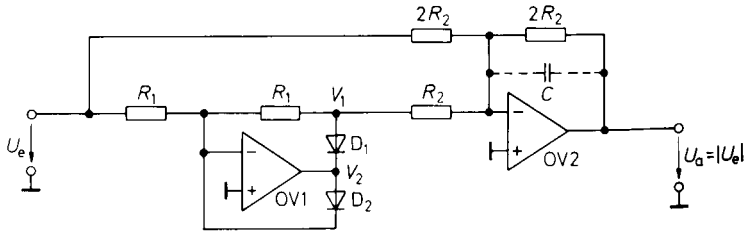

Abbildung 77: Vollweggleichrichter mit auf Masse bezogenem Ausgang

Wird der gestrichelt gezeichnete Kondensator C eingesetzt, so wird durch die Tiefpass-Wirkung der Mittelwert der gleichgerichteten Spannung gebildet.

7.13.2 Scheitelwert

Zur quantitativen Beurteilung kurzzeitiger Spannungsspitzen („glitch“) ist ein Spitzenwertgleichrichter nützlich. Abbildung 78 zeigt das Prinzip.

In Abbildung 79 ist eine modifizierte Schaltung mit „über alles“ Gegenkopplung gezeigt. Die Diode D_2 verhindert bei sperrender Diode D_1 dass der Operationsverstärker OV_1 in die Sättigung gerät.

Kombiniert man ein Abtast-Halte-Glied (Abschnitt 8.3.1 auf Seite 99) mit einem Komparator, so ist ein sehr schneller Scheitelwertmesser realisierbar.

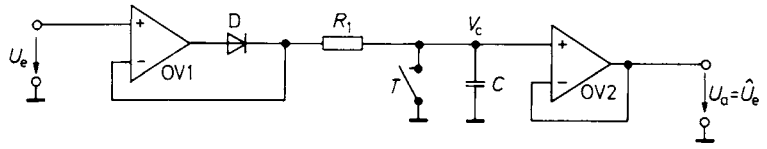

Abbildung 78: Spitzenwertgleichrichter für positiven Spitzenwert

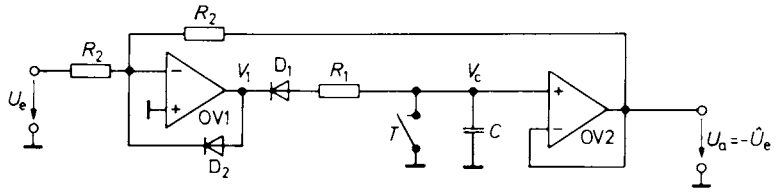

Abbildung 79: Spitzenwertgleichrichter für negativen Spitzenwert

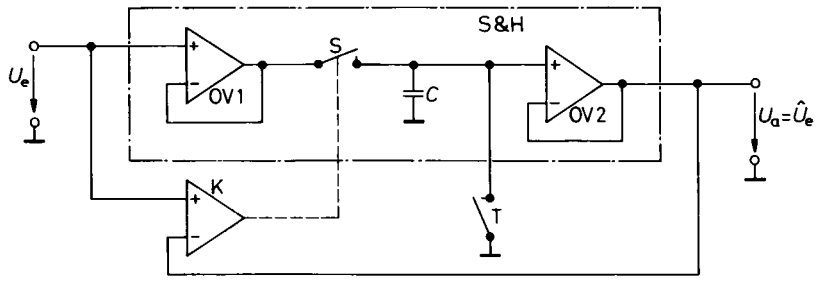

Abbildung 80: Scheitelwertmessung mit Abtast-Halte-Glied

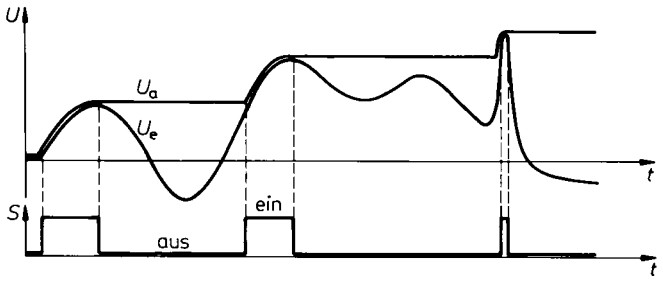

Abbildung 81: Spannungsverläufe zu Abbildung 80

7.13.3 Effektivwert

Ist die Kurvenform bekannt, z. B. rein sinusförmig, so kann der Effektivwert aus dem Spitzenwert oder dem Gleichrichtwert berechnet werden (Abschnitt 6.1 auf Seite 40). In Tabelle 82 sind die Kenngrößen für in der Praxis häufig vorkommende Kurvenformen aufgeführt. Die Abkürzung „MAD“ bedeutet *mean average deviation*, d. h. Betragsmittelwert oder Gleichrichtwert. In der Regel ist die Kurvenform nur näherungs-

Waveform 1 Volt Peak	RMS	MAD	RMS/MAD	Crest Factor
Undistorted Sinewave	$\frac{V_{PEAK}}{\sqrt{2}} = 0.707$ Volts	$\frac{2V_{PEAK}}{\pi} = 0.636$ Volts	$\frac{0.707}{0.636} = 1.11$	$\frac{V_{PEAK}}{V_{rms}} = 1.414$
Symmetrical Squarewave	$\frac{V_{PEAK}}{1} = 1.00$ Volts	$\frac{V_{PEAK}}{1} = 1.00$ Volts	$\frac{1.00}{1.00} = 1.00$	$\frac{V_{PEAK}}{V_{rms}} = 1.00$
Undistorted Triangle-Wave	$\frac{V_{PEAK}}{\sqrt{3}} = 0.580$ Volts	$\frac{V_{PEAK}}{2} = 0.500$ Volts	$\frac{0.580}{0.500} = 1.155$	$\frac{V_{PEAK}}{V_{rms}} = 1.73$

Abbildung 82: Kenngrößen einiger wichtiger Kurvenformen

weise bekannt, so dass sich bei der Effektivwertberechnung Fehler ergeben. Daher ist es genauer, die Definitionsgleichung 70 anzuwenden.

Thermische Bestimmung Die Definition des Effektivwerts nach Gleichung 70 auf Seite 40 kann als thermisches Äquivalent aufgefasst werden. Man muss daher diejenige Gleichspannung ermitteln, die die gleiche Heizleistung wie die zu messende Wechselspannung erbringt. Diese Überlegung führt zu einer Schaltung nach Abbildung 83, die ohne jede Rücksicht auf schaltungstechnische Details das Wirkprinzip veranschaulich Die thermische Konversion ist in der Praxis sehr genau, eignet sich auch für hohe Frequenzen und ist leider sehr teuer in der Realisierung. [11]. Weniger genau, dafür aber leichter monolithisch integrierbar ist die Verwendung von analogen Rechenschaltungen. Abbildung 84 zeigt die direkte (explizite) Anwendung der Definition des Effektivwerts. Durch das Quadrieren der Eingangsspannung ist allerdings ein sehr hoher Dynamikbereich der nachfolgenden Stufen notwendig. Vorteilhafter ist es, die quadrierte Eingangsspannung sofort wieder herunter zu skalieren, wie dies in Abbildung 85 gezeigt ist. Man spricht hierbei von einer impliziten Berechnung. Den größten Dynamikbereich erhält man durch den Einsatz von logarithmischen Verstärkern und Anwendund der Rechenregeln für Logarithmen (Abbildung 86. Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, muss zunächst der Betrag der Eingangsspannung gebildet werden.

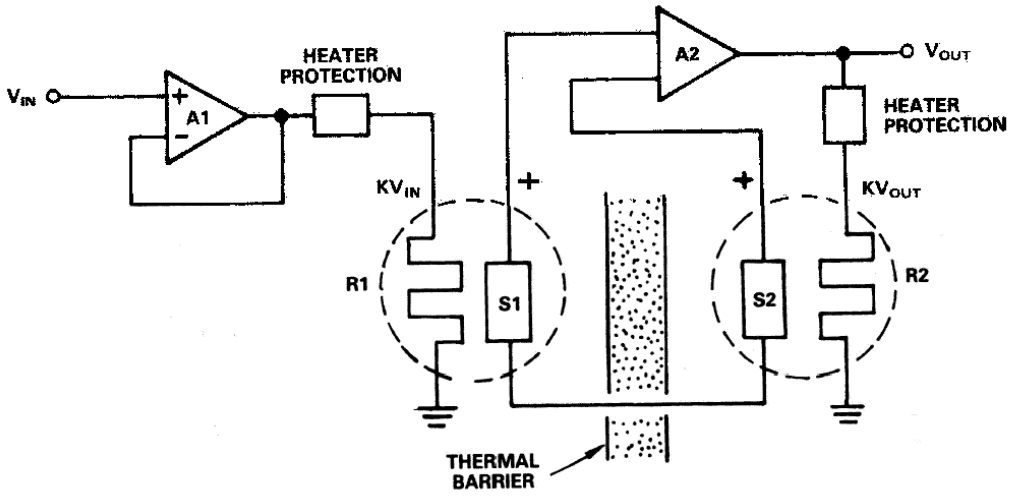

Abbildung 83: Prinzip der thermischen Effektivwert-Bestimmung (S1, S2 Temperaturfühler)

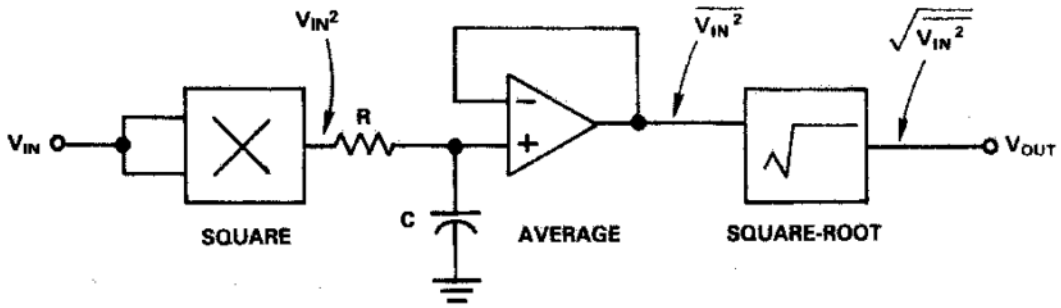

Abbildung 84: Explizite Effektivwertberechnung

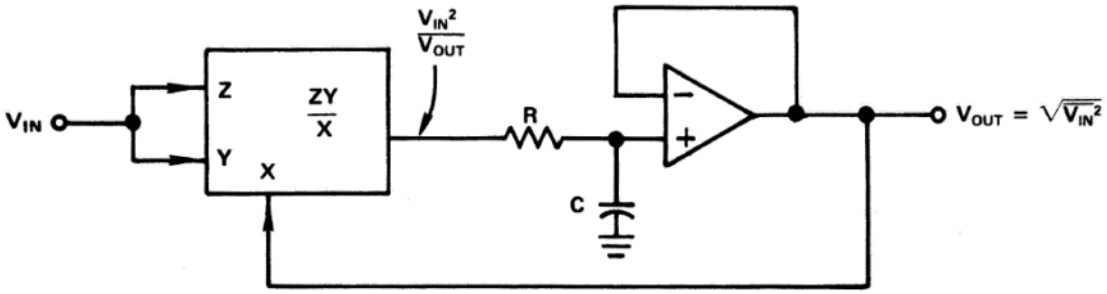

Abbildung 85: Implizite Effektivwertberechnung

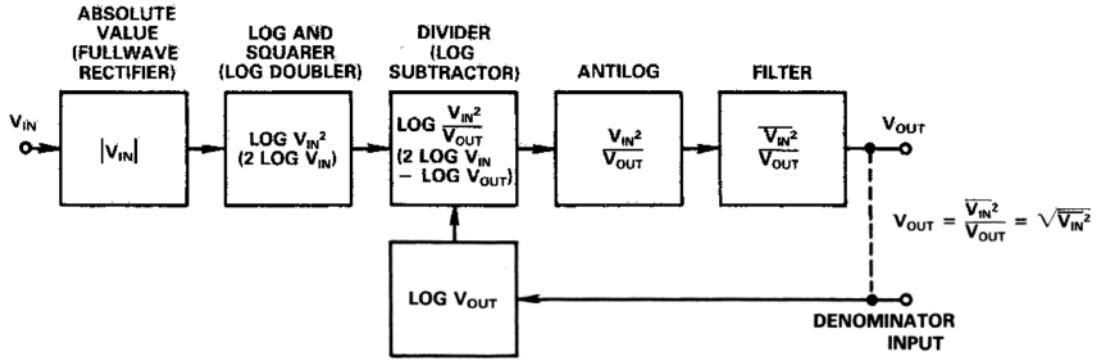

Abbildung 86: Implizite Effektivwertberechnung mit Logarithmierer (Wirkprinzip des AD637)

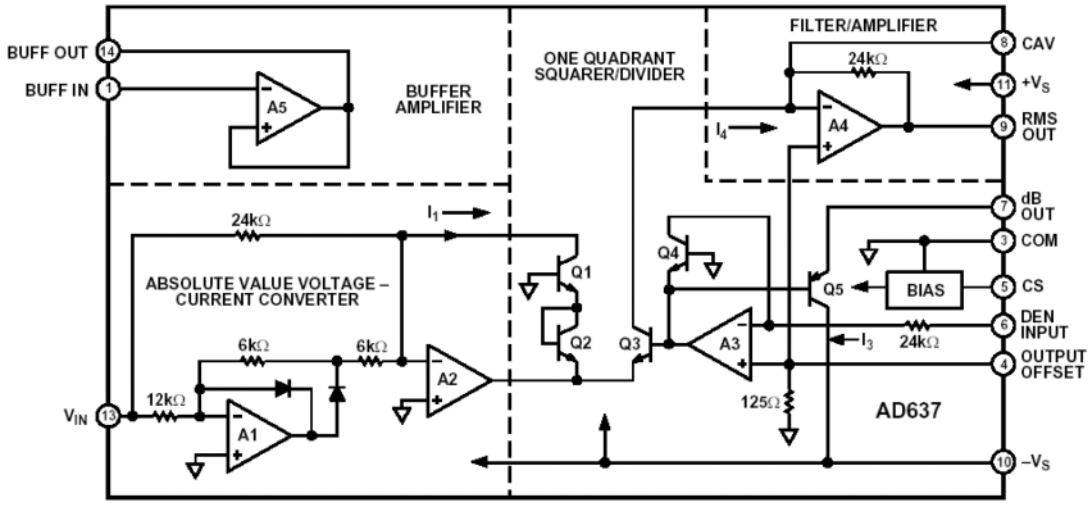

Abbildung 87: Funktionsblöcke des AD637

7.14 Phasenempfindlicher Gleichrichter

Die bisher behandelten Gleichrichter sind selbstgeführt, d. h. die momentante Polarität der Eingangsspannung bestimmt das Verhalten der Schaltung. Dahingegen wird der phasenempfindliche Gleichrichter durch eine Referenzgröße gesteuert, unabhängig vom momentanen Eingangssignal. Je nach Anwendungsgebiet wird der phasenempfindliche Gleichrichter auch Synchrongleichrichter oder Synchrondemodulator genannt. Als komplettes Messsystem ist auch der Name Lock-In-Verstärker gebräuchlich.

Die Wirkungsweise des phasenempfindlichen Gleichrichters zeigt Abbildung 88. Die Eingangsspannung $u_E(t) = \hat{U}_E \sin(\omega t)$ wird mit der aus der Steuerspannung $u_{\text{st}} = \hat{U}_{\text{st}} \sin(\omega t - \varphi)$ gebildeten Rechteckspannung $s(t)$ multipliziert und durch das Tiefpassfilter gemittelt:

$$\overline{u}_A = \overline{u_E(t)\, s(t)} \tag{181}$$

$$s(t) = \operatorname{sign}[u_E(t)] = \begin{cases} +1 & \text{für } u_{\text{st}} > 0 \\ -1 & \text{für } u_{\text{st}} < 0 \end{cases} \tag{182}$$

$$\Longrightarrow u_A(t) = \hat{U}_E \sin(\omega t) \operatorname{sign}\left[\hat{U}_{\text{st}} \sin(\omega t - \varphi)\right]$$

Sind $u_E(t)$ und $u_{\text{st}}(t)$ exakt phasengleich, so erhält man am Ausgang den Gleichrichtwert der Eingangsspannung. Bei einer Phasenverschiebung von $\varphi = 90^\circ$ wird die Ausgangsspannung Null. Für allgemeine Phasenverschiebung φ kann man zeigen:

$$\overline{u}_A = \frac{2}{\pi} \hat{U}_E \cos\varphi \tag{183}$$

Die Betrachtung kann auf Eingangsspannungen verallgemeinert werden, die aus einer beliebigen Überlagerung von Signalen unterschiedlicher Frequenz und Phasenlage bestehen. Nach Durchführung der Mittelwertbildung erhält man:

$$\overline{u}_A = \begin{cases} \frac{1}{m} \frac{2}{\pi} \hat{U}_E \cos\varphi_m & \text{für } m = 2n + 1 \\ 0 & \text{für } m \neq 2n + 1 \end{cases} \tag{184}$$

Gleichung 184 sagt aus, dass der phasenempfindliche Gleichrichter nur ungeradzahlige Vielfache der Steuerspannungsfrequenz detektiert, wobei die höheren Harmonischen mit dem Faktor $1/m$ abgeschwächt werden. Unkorrelierte Signale werden komplett unterdrückt.

Der phasenempfindliche Gleichrichter eignet sich daher sehr gut zur Unterdrückung von Rauschen und unkorrelierten Störungen. Die Phasenlage der Steuerspannung $u_{\text{st})}(t)$ bestimmt die Phasenlage des detektierten Signals $u_E(t)$.

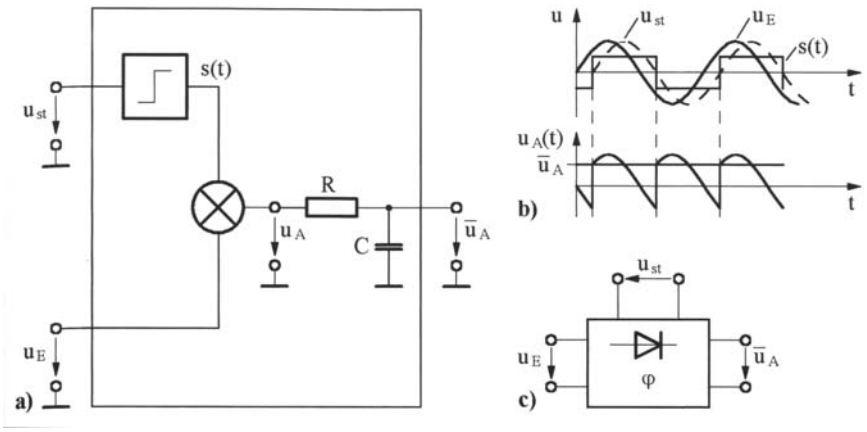

Abbildung 88: Phasenempfindlicher Gleichrichter

7.15 Phasenschieber

Für manche Anwendungen wird eine Schaltung benötigt, die die Phase des Eingangssignals verschiebt, ohne die Amplitude zu beeinflussen. Solche Schaltungen werden Allpass genannt, da alle Frequenzen ungedämpft passieren, jedoch mit frequenzabhängiger Phasendrehung φ.

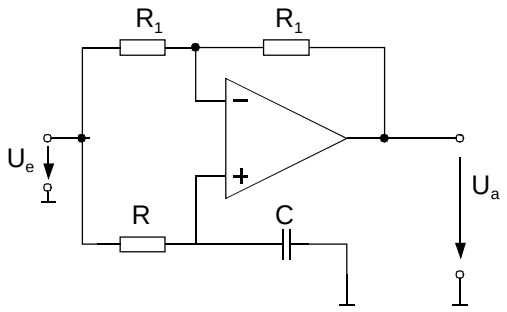

Abbildung 89: Allpass 1. Ordnung

$$\varphi = -2\arctan(\omega R C) \tag{185}$$

8 Digitale Messverfahren

In den überwiegenden Fällen sind die zu messenden Größen kontinuierlich, d. h. analoge Größen. Zur Weiterverarbeitung mit digitalen Verfahren (Signalprozesser, Mikrocontroller etc.) müssen die Messgrößen in digitale Werte umgewandelt werden. Hierzu dienen Analog-Digital-Umsetzer, ADU, (Analog to Digital Converter, ADC). Die umgekehrte Wandlung von digital nach analog erfolgt mit Digital-Analog-Umsetzern, DAU, (Digital to Analog Converter, DAC).

Soll eine analoge Spannung U_e als digitaler Wert Z dargestellt werden, so erfolgt dies in Vielfachen einer zu Grunde liegenden kleinsten Einheit $U_{\mathrm{LSB}} = U_{a\max}/2^N$ (LSB least significant bit, N Wortbreite).

$$Z = \frac{U_e}{U_{\mathrm{LSB}}}$$

Umgekehrt kann der digitale Wert Z wieder in eine analoge Spannung U_a verwandelt werden durch:

$$U_a = Z \cdot U_{\mathrm{LSB}}$$

Durch die Größe von U_{LSB} und die Wortbreite von Z sind Auflösung und Wertebereich des Wandlers festgelegt. Beträgt zum Beispiel $U_{\mathrm{LSB}} = 20\,\mathrm{mV}$ und die Wortbreite 8 Bit, so erhält man eine maximal darstellbare Spannung von

$$U_{max} = 2^8 \cdot U_{\mathrm{LSB}} = 5,12\ \mathrm{V}$$

8.1 Quantisierungsfehler

Grundsätzlich treten bei der Quantisierung Stufen auf, deren Höhe vom Vollausschlag und der Wortbreite abhängen. Eine zeitlich kontinierlich wachsende Spannung wird daher in eine Spannungstreppe umgewandelt (Abbildung 90 links). Der Quantisierungsfehler ist grundsätzlich unvermeidlich und kann lediglich durch hohe Auflösung reduziert werden. Grundsätzlich vermeidbar sind jedoch Linearitätsfehler (Abbildung 90 rechts), die durch sorgfältigen Entwurf, Aufbau und Abgleich des Wandlers beeinflussbar sind. Es sollte angestrebt werden, dass die Linearitätsfehler kleiner sind als der Quantisierungsfehler.

Signal-Rausch-Abstand Ein AD-Wandler mit einer Auflösung von n-Bit kann bei Vollausschlag $Z = 2^n$ Stufen darstellen - bei 8-Bit demnach 256 Stufen. Das niedrigstwertige Bit (LSB) hat bei einer Vollaussteuerung von $U_{\max} = 10$ V den Wert $U_{\mathrm{LSB}} = \frac{10\,\mathrm{V}}{256} \approx 40\,\mathrm{mV}$.

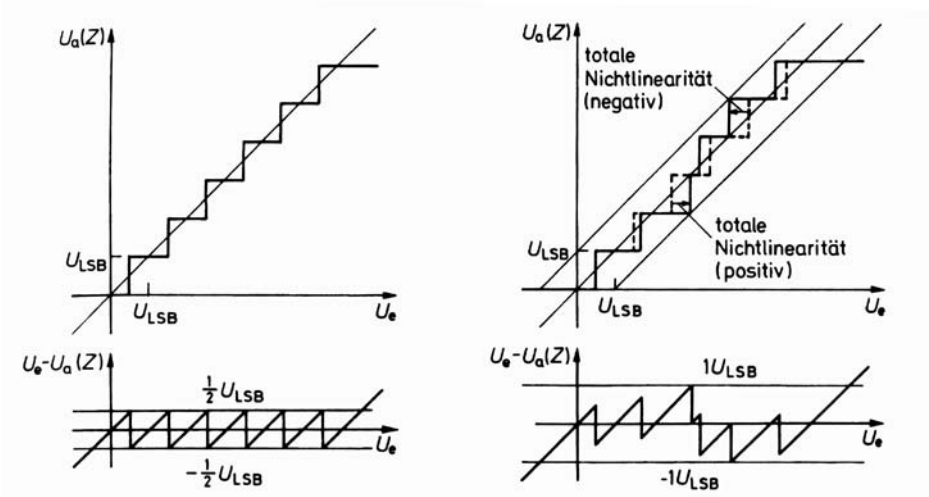

Abbildung 90: Quantisierungsrauschen und Linearitätsfehler

Wird die Eingangsspannung von 0 an kontinuierlich erhöht, kann sich der zugehörige digitale Wert nur in Stufen von U_{LSB} verändern. Daraus ergibt sich eine sägezahnförmige Fehlerspannung, die als Quantisierungsrauschen bezeichnet wird. Für den Effektivwert des Quantisierungsrauschen erhält man:

$$U_{\mathrm{reff}} = \frac{U_{\mathrm{LSB}}}{2\sqrt{3}}$$

Bei sinusförmiger Vollaussteuerung erhält man für einen n-Bit Wandler einen Signal-Rausch-Abstand von:

$$S = 20\,\mathrm{dB}\,\lg\frac{U_{seff}}{U_{reff}} = n\,6\mathrm{dB} + 1,8\,\mathrm{dB} \approx n\,6\,\mathrm{dB}$$

Für einen 8-Bit Wandler ist demnach $S \approx 48$ dB. Bei der Messung periodisch wiederholter Vorgänge kann unter gewissen Voraussetzungen durch Mittelwertbildung mehrerer Messungen der Signal-Rausch-Abstand verbessert werden.

Die Abbildungen 91 und 92 zeigen Beispiele für kontinuierliche Eingangsspannungen, amplituden- und zeitdiskrete Ausgangsspannungen sowie das resultierende Quantisierungsrauschen für einen 4-Bit Wandler.

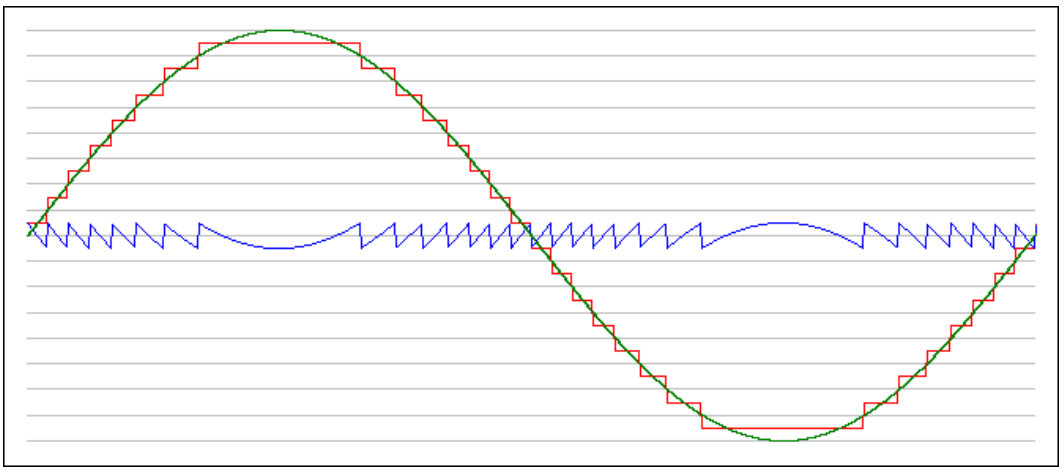

Abbildung 91: Quantisierungsrauschen bei einem reinen Sinus-Signal

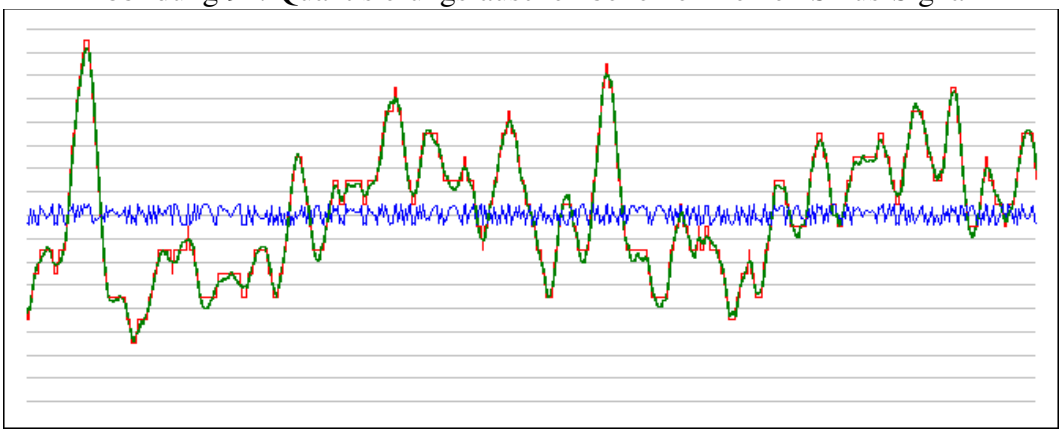

Abbildung 92: Quantisierungsrauschen bei einem Audio-Signal

8.2 Digital-Analog-Wandlung

Zur Digital-Analog-Umsetzung, oder kurz DA-Wandlung, kommen verschiedenen Verfahren zum Einsatz:

- Parallelverfahren
- Zählverfahren
- Wägeverfahren

8.2.1 Parallelverfahren

Beim Parallelverfahren werden alle benötigten Spannungen bereit gestellt und die dem Digitalwert Z entsprechende Spannung an den Ausgang durchgeschaltet. Hierzu wird ein an einer Referenzspannungsquelle U_{ref} angeschlossener Spannungsteiler mit 2^n Abgriffen verwendet. Wie in Abbildung 93 zu erkennen ist, werden dazu 2^n Widerstände und ebensoviele Schalter benötigt. Dieses Verfahren ist aufwändig aber dafür schnell. Es wird in der Regel nur für geringe Wortbreiten angewendet.

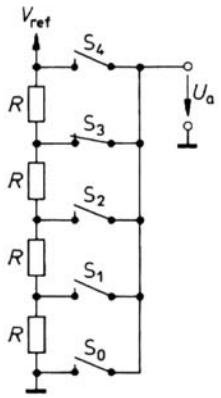

Abbildung 93: DAU mit Parallelverfahren

8.2.2 Zählverfahren

Das Zählverfahren beruht auf der Aufladung eines Kondensators mit einer festgelegten Anzahl von Ladungspaketen ΔQ:

$$U_a = Z \frac{\Delta Q}{C} \tag{186}$$

$$\text{mit} \quad \frac{\Delta Q}{C} = U_{\text{ref}} \tag{187}$$

Damit gleichwertig ist das Aufladen mit einem konstanten Strom I_0 über eine durch Z festgelegte Zeit.

$$U_a = \frac{I_0 \Delta t}{C} \tag{188}$$

Schaltungstechnisch läßt sich dies auch durch eine pulsweitenmodulierte Rechteckspannung $U_{\sqcap}$ realisieren, deren Mittelwert die Analogspannung U_a darstellt:

$$U_{\sqcap} = \begin{cases} U_{\text{ref}} & \text{für} \quad 0 < t \leq t_{on} \\ 0 & \text{für} \quad t_{on} < t \leq T \end{cases} \tag{189}$$

Hierbei ist t_{on} die Einschaltdauer und T die Periodendauer. Definiert man das Tastverhältnis (duty cycle) $p = t_{on}/T$, so ergibt sich für den Mittelwert von $U_{\sqcap}$

$$U_a = \int_0^T U_{\sqcap} dt \; = \; U_{\text{ref}} \cdot p \tag{190}$$

Durch das Tastverhältnis p der Rechteckspannung kann damit ein Ausgangsspannungsbereich von 0 bis U_{ref} abgedeckt werden. Da nur ein einziger Schalter benötigt

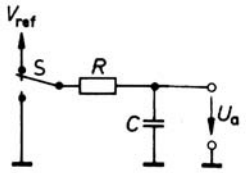

Abbildung 94: DAU mit Zählverfahren

wird, ist das Zählverfahren recht einfach zu realisieren. Allerdings ist nach einer plötzlichen Veränderung des Tastverhältnisses mit einer gewissen Einstellzeit zu rechnen, die durch die Periodendauer der Rechteckspannung und die Zeitkonstante der Mittelwertbildung (*RC*-Glied) bestimmt wird.

8.2.3 Wägeverfahren

Das Wägeverfahren beruht auf der Zusammenschaltung entsprechend gewichteter Widerstände zu Spannungsteilern oder auf der Summation gewichteter Ströme. Grundsätzlich wird pro Bit Auflösung ein Schalter benötigt. Das Grundprinzip zeigt Abbildung 95.

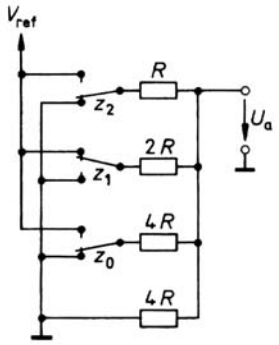

Abbildung 95: DAU mit Wägeverfahren

8.2.4 Genauigkeit von DA-Wandlern

Statische Kenngrößen Die statischen Fehler eines DA-Wandlers treten zu Tage, wenn die Ausgangsspannung eingeschwungen ist.

Prinzipbedingt tritt auch beim idealen Wandler durch die Quantisierung der Ausgangsspannung ein Quantisierungsfehler auf, der auch als Quantisierungsrauschen bezeichnet wird. Dieser ist grundsätzlich nur durch Erhöhen der Auflösung, d. h. Erhöhung der Wortbreite zu verringern.

- Nullpunktfehler
  Der Nullpunktfehler ergibt sich durch die endlichen Sperrströme der geöffneten Schalter, d. h. für $Z = 0$ ergibt sich $U_a \neq 0$.

- Vollausschlagfehler
  Bei Vollausschlag, d. h. $Z = Z_{\max}$ ist $U_a \neq U_{a\max}$.

- Nichtlinearität
  Ein perfekter DA-Wandler liefert für $U_a(Z)$ eine ideale Treppenfunktion mit gleich hohen Stufen. Durch Widerstandstoleranzen können diese Stufen jedoch unterschiedlich hoch sein. Es ist unbedingt anzustreben, dass die Nichtlinearität kleiner als $\pm 1/2\ U_{\mathrm{LSB}}$ ist, da sonst das niedrigstwertige Bit irrelevant ist. Bei größerer Nichtlinearität kann sogar ein Monotoniefehler auftreten, das heißt für $Z_2 > Z_1$ kann der Fall $U_a(Z_2) < U_a(Z_1)$ auftreten. Anschaulich bedeutet dies, das die Spannungstreppe nicht mehr monoton ansteigt sondern an einer bestimmten Stelle wieder nach unten geht.

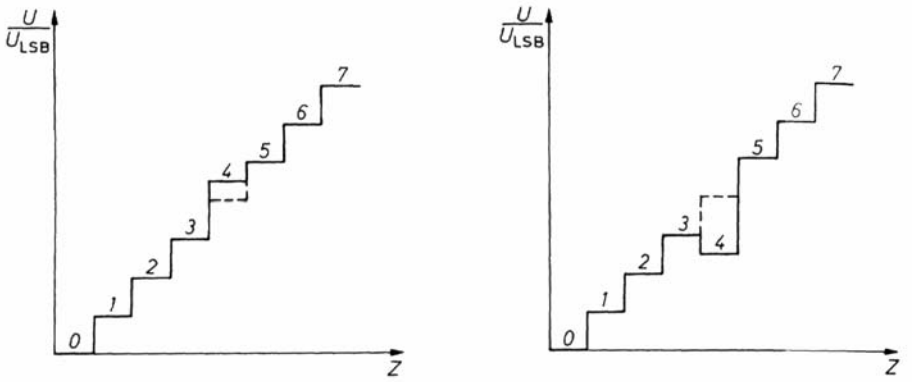

Abbildung 96: Fehler von DA-Wandlern

Dynamische Kenngrößen Für das dynamische Verhalten eines DA-Wandlers sind sowohl Einschwingzeit als auch eventuell auftretende Spannungsspitzen bzw. Störimpulse (glitches) wichtige Größen.

- Einschwingzeit
  Die Einschwingzeit gibt an, wie lange es nach einem Sprung von 0 auf $Z_{\max}$ dauert, bis das Ausgangssignal den stationären Wert bis auf eine Abweichung von $\pm 1/2\, U_{\mathrm{LSB}}$ erreicht hat. Bei gleicher Technologie ist die Einschwingzeit bei niedriger Auflösung definitionsgemäß geringer, da das zulässige Toleranzband U_{LSB} bei niedriger Auflösung entsprechend größer ist.

- Störimpulse (glitches)
  Diese treten vor allem bei DA-Umsetzern nach dem Wägeverfahren auf, wenn die Schalter nicht alle gleichzeitig schalten. Dadurch kann kurzzeitig am Ausgang eine fehlerhafte Spannung anliegen, die sich als kurzzeitige Spannungsspitze bemerkbar macht. Werden diese Spannungsspitzen durch Tiefpassfilter unschädlich gemacht, erhöht sich die Einschwingzeit. Es kann auch ein Abtast-Halteglied verwendet werden, das erst nach Schalten aller Schalter auf den Ausgang des DA-Wandlers durchgeschaltet wird.

8.3 Analog-Digital-Umsetzung

Bei der Analog-Digital-Umsetzung wird eine kontinuierlich veränderliche Spannung (amplituden- und zeitkontinuierlich) in eine zu einem Momentanwert der Spannung proportionale ganze Zahl umgewandelt. Es erfolgt daher eine Diskretisierung sowohl der Amplitude als auch der Zeit. Die analoge Rekonstruktion des Spannungsverlaufs kann umso unverfälschter erfolgen, je höher die Auflösung der Amplitudendiskretisierung ist und je kürzer der Abtastabstand ist. Daher ist eine hohe Wortbreite des Digitalwerts und eine hohe Abtastrate wünschenswert.

Bevor Verfahren zur Analog-Digital-Umsetzung vorgestellt werden, soll eine Schaltung zur zeitdiskreten Abtastung behandelt werden, die als Ergebnis einen zeitdiskreten aber wertkontinuerlichen (analogen) Amplitudenwert liefert. Die Vorgänge bei der Digitalisierung sind in Abbildung 97 veranschaulicht.

8.3.1 Abtast-Halte-Glied (Sample & Hold)

Insbesondere bei der Digital-Analog-Wandlung mit sukzessiver Approximation (Abschnitt 8.3.4 auf Seite 106) ist es wichtig, dass der zu wandelnde Wert konstant ist. Zur analogen Speicherung kann ein sogenanntes Abtast-Halte-Glied (Sample & Hold) verwendet werden, das die Spannung als Ladungsabbild in einem Kondensator speichert (Abbildungen 98, 99).

Es werden zwei verschiedene Betriebsweisen unterschieden:

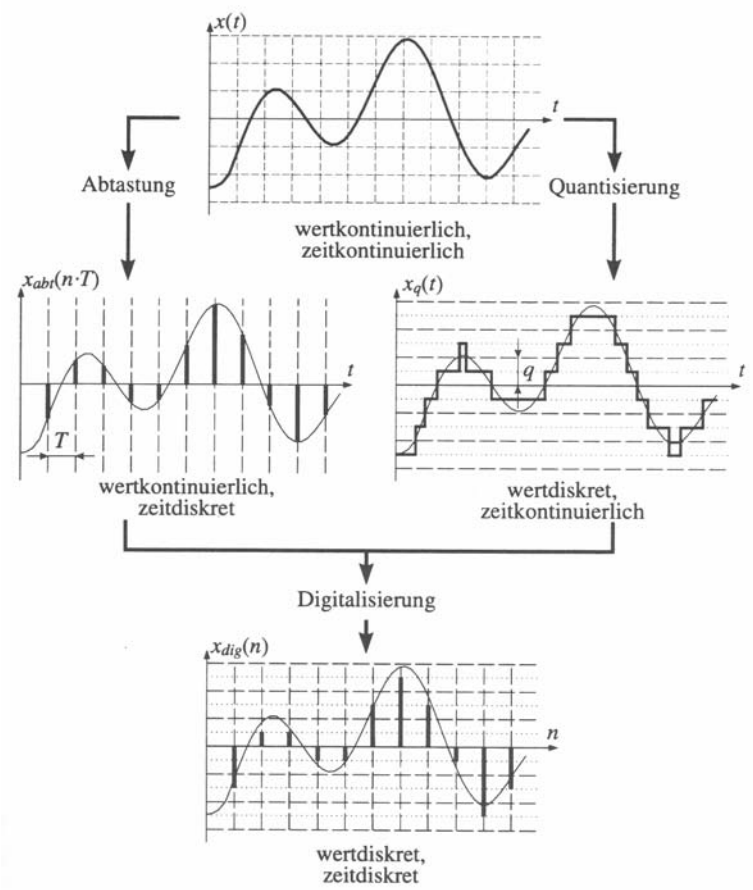

Abbildung 97: Abtastung und Quantisierung

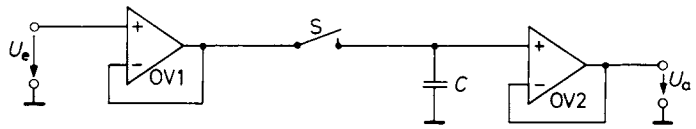

Abbildung 98: Abtast-Halte-Glied (Sample & Hold)

- *Folgen (tracking/sampling)* Die Ausgangsspannung folgt der Eingangsspannung, wobei die Eigenschaften der Operationsverstärker (slew rate etc.) sowie des Haltekondensators berücksichtigt werden müssen.
- *Halten(hold)* Die Eingangsspannung ist abgetrennt, die Ausgangsspannung entspricht der auf dem Kondensator gespeicherten Ladung. Mögliche Fehlereinflüsse im Haltemodus sind

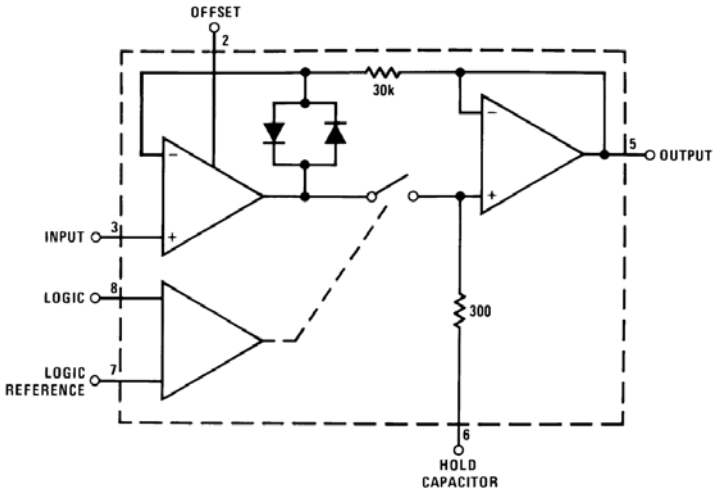

Abbildung 99: Prinzipschaltung des integrierten Abtast-Halte-Gliedes LF398

- kapazitives Übersprechen ⟶ *feed through*
- Eingangsruhestrom, Leckstrom des Kondensators ⟶ *droop rate*

Ein Beispiel für die Spannungsverläufe zeigt Abbildung 100.

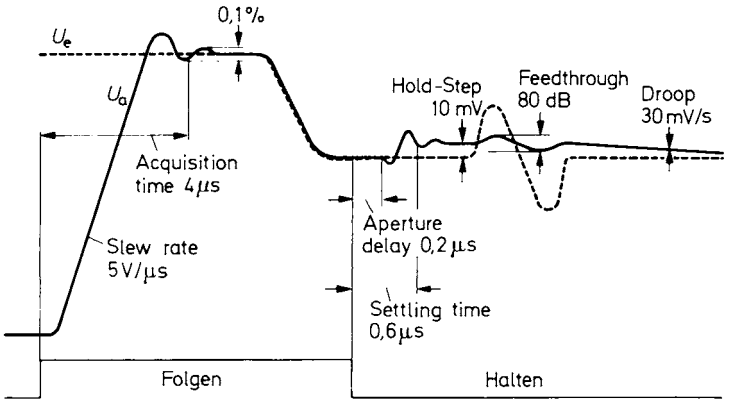

Abbildung 100: Spannungsverläufe am Beispiel LF398

Durch die Fluktuation des Abtastzeitpunktes (aperture jitter) entsteht insbesondere bei schnell veränderlichen Eingangsspannungen ein dynamischer Fehler, der in Abbildung 101 veranschaulicht wird.

Definition of Terms

Hold Step: The voltage step at the output of the sample and hold when switching from sample mode to hold mode with a steady (dc) analog input voltage. Logic swing is 5V.

Acquisition Time: The time required to acquire a new analog input voltage with an output step of 10V. Note that acquisition time is not just the time required for the output to settle, but also includes the time required for all internal nodes to settle so that the output assumes the proper value when switched to the hold mode.

Gain Error: The ratio of output voltage swing to input voltage swing in the sample mode expressed as a per cent difference.

Hold Settling Time: The time required for the output to settle within 1 mV of final value after the "hold" logic command.

Dynamic Sampling Error: The error introduced into the held output due to a changing analog input at the time the hold command is given. Error is expressed in mV with a given hold capacitor value and input slew rate. Note that this error term occurs even for long sample times.

Aperture Time: The delay required between "Hold" command and an input analog transition, so that the transition does not affect the held output.

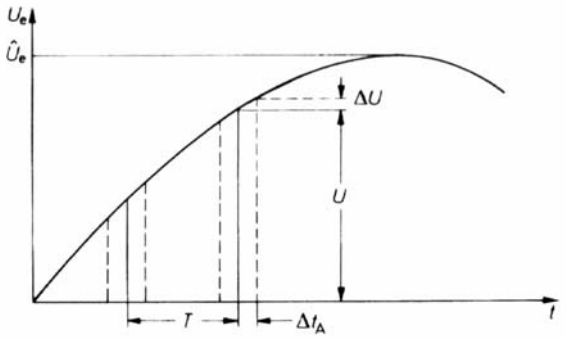

Abbildung 101: Fehler durch Fluktuation des Abtastzeitpunkts (aperture jitter)

8.3.2 Parallelverfahren

Beim Parallelverfahren wird die Eingangsspannung U_e gleichzeitig mit 2^N Spannungen verglichen. Der zugehörige Zahlenwert Z steht unmittelbar nach Schalten der 2^N Komparatoren und der Dekodierung zur Verfügung (vgl. Abbildung 102). Da der Digitalwert Z nach einem einzigen Schritt zur Verfügung steht, ist der Parallelwandler sehr schnell und wird auch Flash-Wandler genannt. Da der Schaltungsaufwand sehr hoch ist, sind Flash-Wandler in der Regel auf niedrige Wortbreiten begrenzt.

8.3.3 Zählverfahren

Wie auch bei der DA-Umsetzung, werden Zählverfahren dort verwendet, wo es nicht auf hohe Wandlungsgeschwindigkeit ankommt. Je nach Anforderungen an Genauigkeit und Geschwindigkeit unterscheidet man 3 Varianten.

Kompensationsverfahren Die AD-Wandlung beim Kompensationsverfahren beruht im wesentlichen auf der DA-Wandlung der ermittelten Vergleichsspannung $U_(Z)$

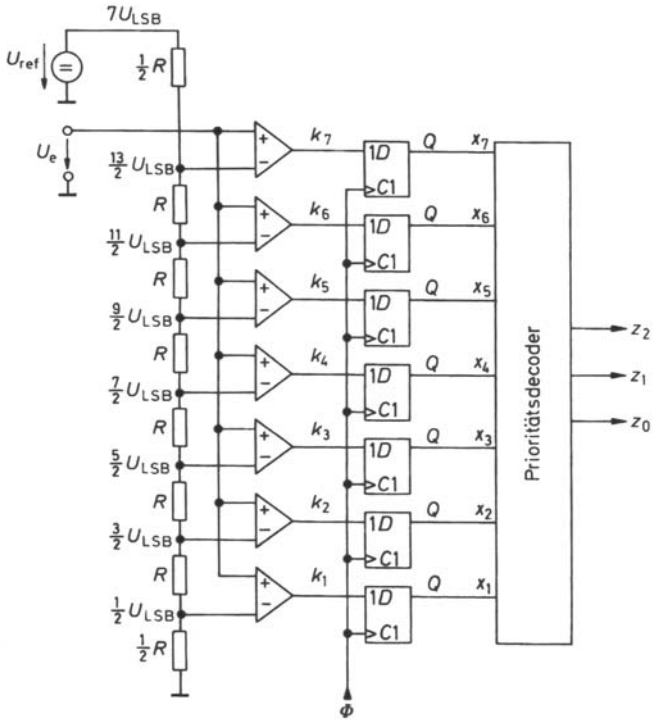

Abbildung 102: AD-Wandler nach dem Parallelverfahren (Flash-Wandler)

Beim Kompensationsverfahren wird bei einer anliegenden Spannung $U_e > U(Z)$ der Wert für Z solange erhöht, bis die auf den Eingang rückgekoppelte Spannung $U(Z)$ die Eingangsspannung überschreitet. Solange dann $U(Z) > U_e$ ist, wird Z wieder erniedrigt. Das Prinzip der Schaltung zeigt Abbildung 103. Die Ausgangsspannung läuft so-

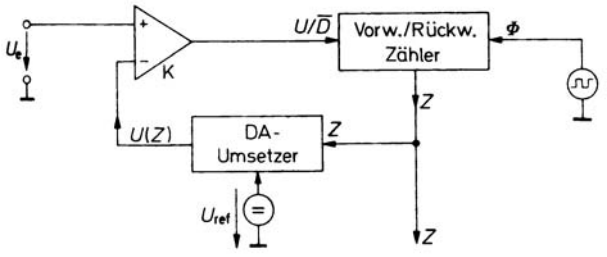

Abbildung 103: AD-Wandler nach dem Kompensationsverfahren

zusagen der Eingangsspannung hinterher, weshalb man auch vom Nachlaufverfahren spricht. Bei der gezeigten einfach Prinzipschaltung springt bei konstanter Eingangsspannung die Ausgangsspannung immer um 1 LSB auf und ab. Im ungünstigsten Fall

beträgt die Einschwingzeit 2^N Taktzyklen, wenn die Eingangsspannung von 0 auf $U_{\max}$ springt. Haupteinsatzgebiet des Nachlaufverfahrens ist daher die Messung langsam veränderlicher Größen wie z. B. Raumtemperatur. Die Genauigkeit wird wesentlich von der Genauigkeit des erforderlichen DA-Umsetzers bestimmt.

Ein-Rampen-Verfahren (Single Slope) Das Ein-Rampen-Verfahren stellt die Umkehrung des Zählverfahrens bei der DA-Umsetzung dar (vgl. Abschnitt 8.2.2). Die Prinzipschaltung ist in Abbildung 104 gezeigt. Der Zähler muss zu Beginn der Mes-

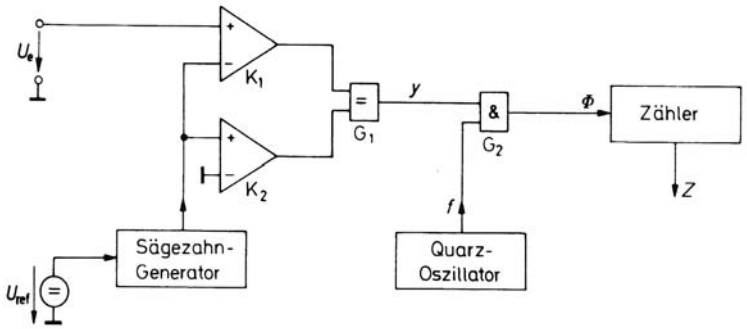

Abbildung 104: AD-Wandler nach dem Ein-Rampen-Verfahren

sung auf Null gesetzt sein. Die Eingangsspannung U_e wird mit einer linear mit der Zeit ansteigenden Sägezahnspannung $U_S = \frac{U_{\text{ref}}}{T} \cdot t - U_0$ verglichen und es wird die Zeit Δt gemessen, die die Sägezahnspannung benötigt, von ihrem Nulldurchgang ausgehend die Eingangsspannung U_e zu erreichen. Solange $0 < U_S < U_e$ sind die Ausgänge beider Komparatoren $K_1 = K_2 = 1$, entsprechend liefert das Äquivalenzgatter G_1 den Wert $y = 1$ und über das UND-Gatter G_2 werden die Taktimpulse zum Zähler durchgeschaltet. Bei $U_S = U_{\text{ref}} \cdot \frac{\Delta t}{T} \geq U_e$ wird $y = 0$ und das Gatter G_2 sperrt, wodurch der Zähler stehen bleibt. Nach Abschluss der Wandlung stellt die Zahl der im Zeitintervall Δt gezählten Impulse $Z = f \cdot \Delta t$ ein Maß für die Eingangsspannung dar. Mit $\Delta t = T \frac{U_e}{U_{\text{ref}}}$ erhält man

$$Z = f \cdot T \cdot \frac{U_e}{U_{\text{ref}}} \tag{191}$$

Das Ein-Rampen-Verfahren beruht somit auf der Integration der Referenzspannung solange die Bedingung $U_S < U_e$ erfüllt ist. Die Maßzahl der Integration ist der gesuchte Digitalwert Z. Nachteilig ist, dass gemäß Gleichung 191 Fehler der Frequenz f, der Referenzspannung U_{ref} und vor allem Fehler der Periodendauer T das Ergebnis Z beeinflussen.

Zwei-Rampen-Verfahren (Dual Slope) Beim Zwei-Rampen-Verfahren wird neben der Referenzspannung auch die Eingangsspannung integriert (Abbildungen 105, 106)

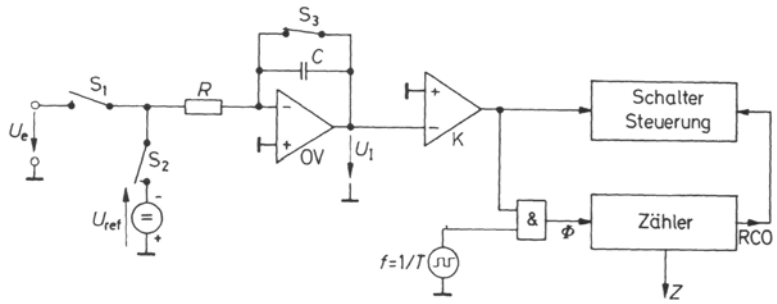

Abbildung 105: AD-Wandler nach dem Zwei-Rampen-Verfahren

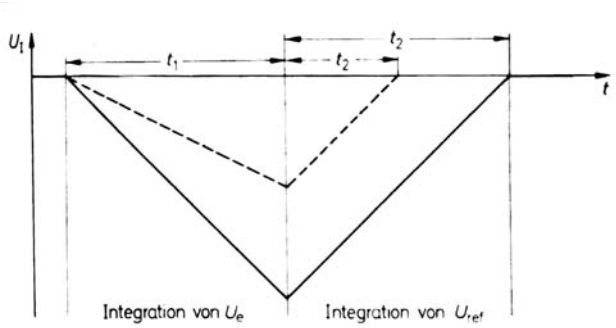

Abbildung 106: Verlauf der Rampenspannung

Vor Beginn der Messung wird der Zähler gelöscht, die Schalter S_1 und S_2 sind geöffnet, S_3 ist geschlossen. Dadurch wird C entladen und der (Umkehr-)Integrator zurückgesetzt. Bei Start der Messung zu $t = 0$ wird S_3 geöffnet und S_1 geschlossen. Für $U_e > 0$ ergibt sich $U_1 < 0$ und der Komparator K gibt über das UND-Gatter den Takt für den Zähler frei. Wenn der Zähler zum Zeitpunkt t_1 nach $Z_{\max} + 1 = t_1 \cdot f = t_1/T$ Taktperioden überläuft, wird der Schalter S_1 geöffnet, S_2 geschlossen und somit die negative Referenzspannung $-U_{\text{ref}}$ aufintegriert. Nach der Zeit t_2 wird wieder $U_1 = 0$ erreicht und der Zähler wird gestoppt. Da nach dem Überlauf der Zähler wieder auf Null steht,

beträgt zum Zeitpunkt t_2 der Zählerstand $Z = t_2 \cdot f = t_2/T$. Man erhält:

$$\begin{aligned}
&\text{Annahme} && U_e > 0 \\
\text{für } 0 < t < t_1 \quad &\text{gilt:} && U_1 = -\frac{1}{RC} \cdot U_e \cdot t < 0 \\
\text{für } t1 \leq t < t_2 \quad &\text{gilt:} && U_1 = -\frac{1}{RC} \cdot (-U_{\text{ref}}) \cdot t < 0 \\
\text{für } t = t_2 \quad &\text{gilt:} && U_1 = \frac{1}{RC} \cdot [(-U_e) \cdot t_1] + U_{\text{ref}} \cdot t_2 = 0 \\
&\text{mit} && t_1 = T \cdot (Z_{\max} + 1) \\
&\text{und} && t_2 = T \cdot Z \\
&\Longrightarrow && 0 = U_e \cdot (Z_{\max} + 1) \cdot T - U_{\text{ref}} \cdot Z \cdot T \\
&\Longrightarrow && Z = \frac{U_e}{U_{\text{ref}}} \cdot (Z_{\max} + 1)
\end{aligned} \tag{192}$$

Wie man an Gleichung 192 sieht, ist das Ergebnis unabhängig von den Toleranzen der Integrationszeitkonstanten RC und von der Taktrate $f = 1/T$. Damit sich diese aus der Gleichung heraushebt, muss lediglich die Konstanz von T während des Messintervalls $t_1 + t_2$ gefordert werden.

8.3.4 Wägeverfahren (Sukzessive Approximation)

Beim Wägeverfahren wird nacheinander (sukzessive) die Eingangsspannung mit der jeweils im vorangegangenen Schritt angenäherten Spannung verglichen. Bei jedem Schritt wird dadurch die Spannung besser angenähert, nach N Schritten beträgt der Fehler noch U_{LSB}. Die Prinzipschaltung des Wägeverfahren ist in Abbildung 107 gezeigt. Die Eingangsspannung wird mit einem Abtast-Halte-Glied „eingefroren“ und im

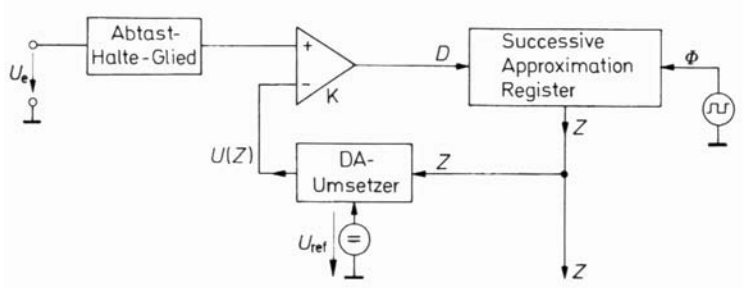

Abbildung 107: AD-Wandler nach dem Wägeverfahren

Komparator K mit der Spannung $U(Z)$ verglichen. Zu Messbeginn wird das höchstwertige Bit (MSB) auf 1 gesetzt, alle anderen Bits sind Null. Falls $U_e \geq U(Z1)$, so bleibt das MSB gesetzt, falls $U_e < U(Z1)$ wird das MSB wieder auf Null gesetzt. Im

nächsten Schritt wird das nächst niedrigere Bit auf 1 gesetzt und U_e mit der sich ergebenden Spannung U_{Z2} verglichen usw. Das Flussdiagramm für das Wägeverfahren ist in Abbildung 108 dargestellt, die zeitliche Entwicklung der gewandelten Spannung in Abbildung 109. Bei der schaltungstechnischen Realisierung wird die Ablaufsteuerung

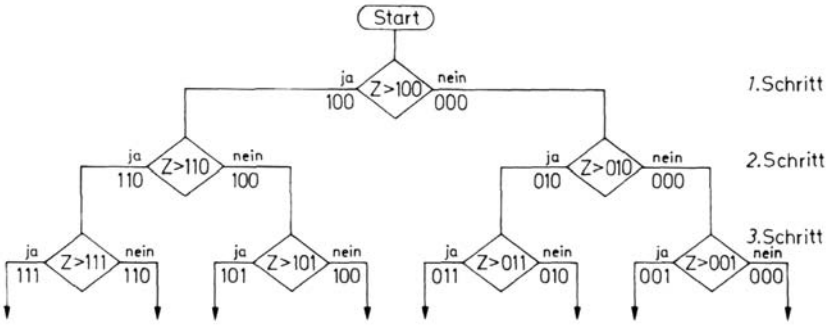

Abbildung 108: Ablauf der sukzessiven Approximation

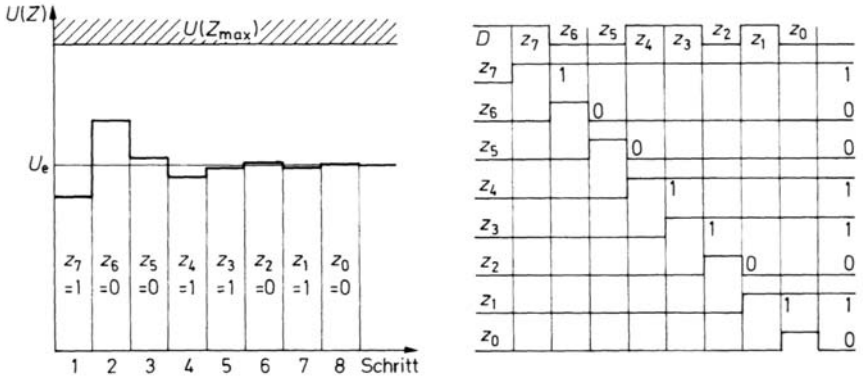

Abbildung 109: Zeitlicher Verlauf der gewandelten Spannung (links) sowie des erhaltenen Digitalwerts (rechts)

von einem speziellen Register (SAR Successive Approximation Register) übernommen. Eine Realisierungsmöglichkeit zeigt Abbildung 110.

Nach beendeter Wandlung erhält man

$$Z = (Z_{\max} + 1) \cdot \frac{U_e}{U_{\text{ref}}} \tag{193}$$

Die maximale Auflösung ist durch die Wortbreite des SAR gegeben, zum Ausnutzen der maximalen Auflösung sind N Approximationsschritte erforderlich. Wird

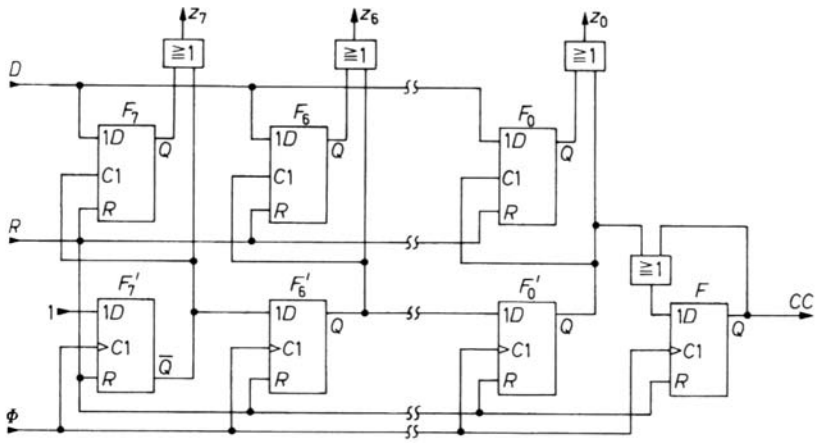

Abbildung 110: Ablaufsteuerung für sukzessive Approximation

Tabelle 6: Vergleich der DA-Wandlungsverfahren

Verfahren	Anzahl der Wandlungsschritte	Anzahl der Referenzspannungen	Bemerkung
Parallelverfahren	1	2^N	aufwendige Hardware sehr schnell, DSO
Zählverfahren	2^N	1	einfache Hardware sehr langsam, DMM
Wägeverfahren	N	N	Kompromiss Standard

zu Gunsten einer kürzeren Wandlungszeit eine geringere Auflösung gewünscht, kann die Approximation schon früher abgebrochen werden. Die Auflösung reduziert sich dann entsprechend. Eine instruktive Demonstration der sukzessiven Approximation und weiterer AD-Wandler verfahren findet man unter *http://ac16.uni-paderborn.de/arbeitsgebiete/messtech/simulationen/ad/index.html*

Jedes der bisher beschriebenen Verfahren hat seine Stärken und Schwächen, die es für bestimmte Einsatzzwecke prädestinieren. Tabelle 6 gibt einen Überblick über die wesentlichen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Wortbreite N.

Die Einsatzbereiche der unterschiedlichen Verfahren sind in Abbildung 111 dargestellt.

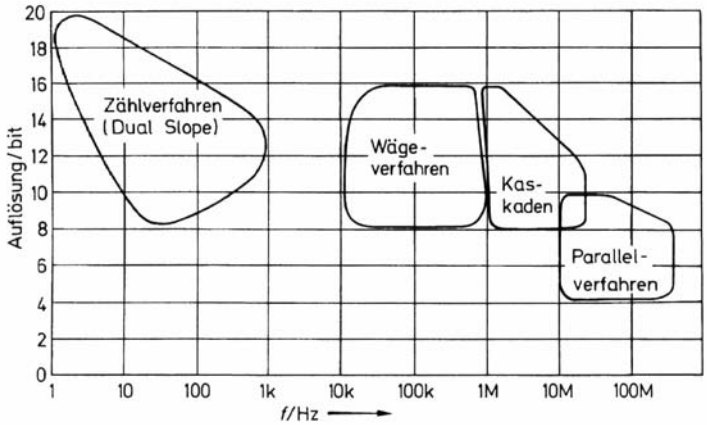

Abbildung 111: Einsatzbereiche von AD-Wandlern nach Wandlungsrate und Auflösung

8.3.5 Spannungs-Frequenz-Umsetzer

Die bisher behandelten Analog-Digital-Umsetzer lieferten direkt einen Digitalwert, der numerisch weiterverarbeitet werden kann. In manchen Anwendungen ist es vorteilhaft, zunächst die zu messende Spannung in eine proportionale Frequenz umzuwandeln, insbesondere bei der Übertragung von Sensorsignalen. Ein Signal mit einer spannungsproportionalen Frequenz wird weniger von Störeinflüssen beeinträchtigt als eine analoge Spannung. Die eigentliche Diskretisierung in Form einer Frequenzmessung erfolgt erst unmittelbar am Ort der Anzeige bzw. bei der Einspeisung des Signals in das Messdatenerfassungssystem.

Grunsätzlich kann ein Spannungs-Frequenz-Umsetzer (U/f-Umsetzer) als spannungsgesteuerter Oszillator mit Oszillatorfrequenz $f_O(U)$ aufgefasst werden (*voltage controlled oscillator VCO*). Eine mögliche Realisierung zeigt Abbildung 112.
Das Vorzeichen der Eingangsspannung U_e des Integrators wird hin- und hergeschaltet,

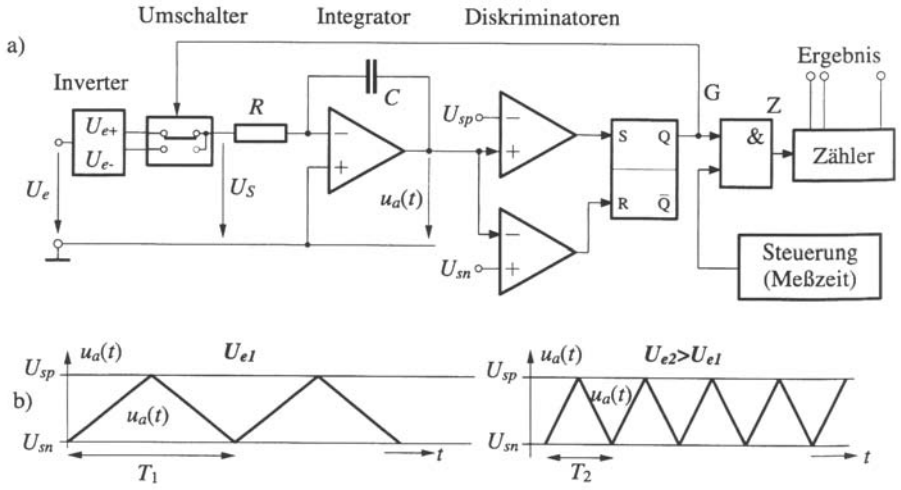

Abbildung 112: U/f-Umsetzer: a) Prinzipschaltung, b) Spannungsverlauf für verschiedene Eingangsspannungen $U_{e2} > U_{e1}$

so dass sich für die Ausgangsspannung $u_a(t)$ eine Dreieckspannung ergibt. Der Umschaltzeitpunkt für die Polarität ist durch die Schaltschwellen U_{sp}, U_{sn} der Komparatoren festgelegt. Am Ausgang des RS-Flipflops steht ein Digitalsignal G mit Frequenz $f_O \propto U_e$ zur Verfügung. Der Frequenzzähler - bestehend aus Messzeitsteuerung, Torschaltung Z und Zählerschaltung - kann auch räumlich weiter entfernt sein. Neben der gewünschten Abhängigkeit von U_e hängt die Frequenz f_O auch von der Integrationszeitkonstanten RC ab. Die dadurch bedingten Toleranzen der $f_O(U)$-Kennlinie können durch Abgleich von U_{sp} und/oder U_{sn} beseitigt werden.

8.3.6 Taktgesteuerter Ladungskompensations-Konverter

Wie beim U/f-Umsetzer wird auch beim Ladungskompensations-Konverter ein Integrator verwendet. Allerdings wird die aufintegrierte Eingangsspannung über einen getaktet eingespeisten Strom periodisch wieder „abintegriert“.

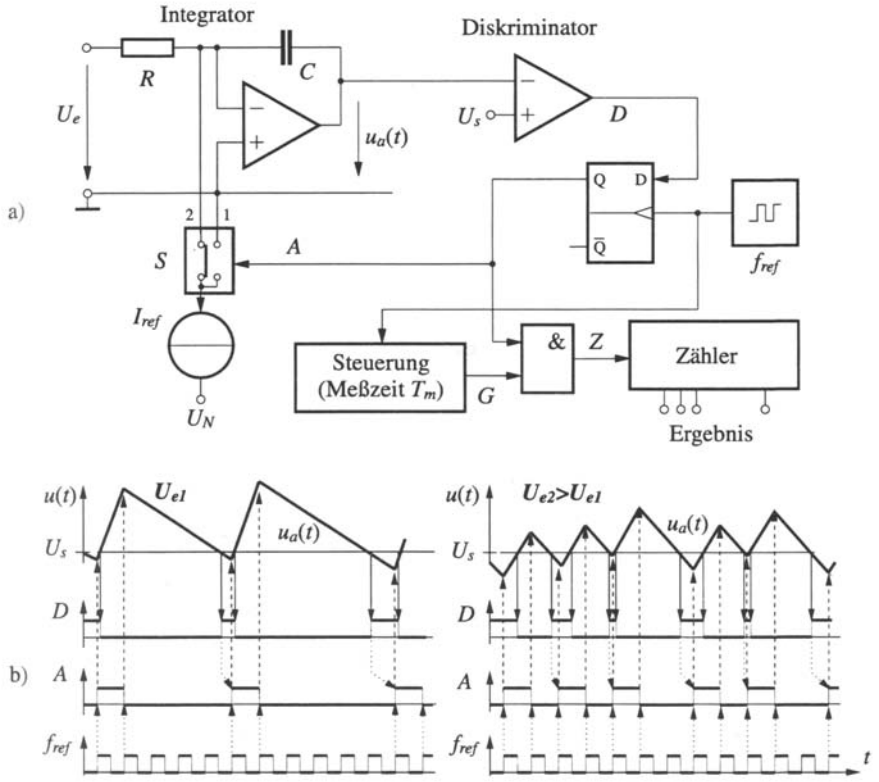

Abbildung 113: Taktgesteuerter Ladungskompensationskonverter: a) Prinzipschaltung, b) Spannungsverlauf für verschiedene Eingangsspannungen $U_{e2} > U_{e1}$

Nach dem Einschalten befindet sich der Schalter S in Position 1 (Abbildung 113). Der Kondensator C wird mit dem Strom $\frac{U_e}{R}$ aufgeladen ($U_e > 0$), die Ausgangsspannung $u_a(t)$ des Integrators fällt demzufolge proportional zur Zeit t ab. Bei Unterschreiten der Spannung U_s kippt der Komparator auf $D = 1$, das flankengetriggerte D-Flipflop geht bei der nächsten positiven Taktflanke des Taktgenerators (Frequenz f_{ref}) auf $Q = A = 1$. Dadurch wird der Schalter S auf die Stellung 2 geschaltet und der Kondensator wird mit dem Strom $I = \frac{U_e}{R} - I_{\text{ref}}$ entladen und die Integratorausgangsspannung steigt wieder auf $u_a(t) > U_s$ an. Der resultierende Komparatorzustand $D = 0$ führt bei der nächsten positiven Taktflanke zu $A = 0$, wodurch der Schalter wieder in Stellung 1 gebracht wird.

Dem Kondensator wird daher innerhalb einer Periodendauer $T_{\text{ref}} = \frac{1}{f_{\text{ref}}}$ des Taktgenerators die Ladung $Q_{\text{ref}} = I_{\text{ref}}\, T_{\text{ref}}$ entnommen. Da die gesamte Schaltung als geschlossener Regelkreis arbeitet, muss im stationären Fall der aufladende Strom $\frac{U_e}{R}$ gleich dem mitteleren entladenden Strom $Q_{\text{ref}} f_A$ sein. Die Frequenz f_A ist hierbei die Frequenz (Häufigkeit), mit der die Ladungsportion $Q_{\text{ref})}$ vom Kondensator entnommen wird. (im Mittel durch die mit f_A getaktete Referenzstromquelle ableßender Strom):

$$\begin{aligned} Q_{\text{ref}} &= I_{\text{ref}}\, T_{\text{ref}} = \frac{I_{\text{ref}}}{f_{\text{ref}}} \\ Q_{\text{ref}} f_A &= \frac{U_e}{R} \\ \Longrightarrow\ f_A &= \frac{U_e}{I_{\text{ref}} R} \cdot f_{\text{ref}} \end{aligned} \tag{194}$$

8.3.7 Delta-Sigma-Verfahren

Das Delta-Sigma-Verfahren gehört wie das Kompensationsverfahren (Abschnitt 8.3.3 auf Seite 102) zu den Verfahren mit Rückkopplung und ähnelt stark dem taktgesteurtem Ladungskompensator. Das Ein- und Ausschalten des in den Summationsknoten eingespeisten Referenzstroms I_{ref} kann als 1-Bit DA-Wandlung aufgefasst werden.

Um eine höhere Auflösung aus 1 Bit zu erhalten, muss die Abtastrate wesentlich über die durch das Abtasttheorem vorgegebene Rate erhöht werden, man spricht von Überabtastung (*oversampling*). Das Funktionsprinzip für eine allgemeine zeitabhängige Größe $x(t)$ mit maximaler Signalfrequenz f_{max} ist in Abbildung 114 auf der nächsten Seite gezeigt. Der AD-Wandler ist im einfachsten Fall nur ein Komparator (1-Bit AD-Umsetzer), der DA-Wandler ein Schalter (1-Bit DA-Umsetzer). Das Signal $y_O(t)$ stellt daher einen Bitstrom dar, der mit der Abtastfrequenz $f_O = k \cdot 2 \cdot f_{\text{max}}$ geliefert wird. Die durchschnittliche Zahl der 1-Werte im Bitstrom ist proportional zur Eingangsgröße $x(t)$. k ist dabei das Überabtastungsverhältnis (oversampling ratio). Wird die Zahl der 1-Werte in jeweils gleich langen Intervallen gezählt, erhält man einen Wert $y(n)$ bei einer niedrigeren Rate, jedoch mit höherer Auflösung.

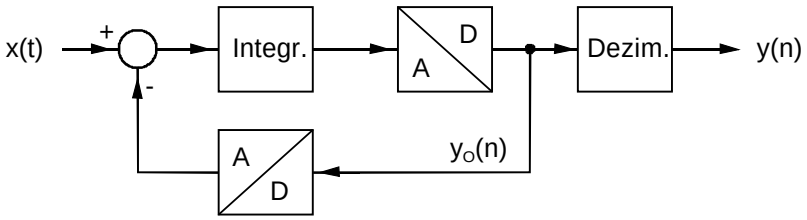

Abbildung 114: Funktionsprinzip eines Delta-Sigma-Wandlers 1. Ordnung

In Analogie zur Fehlerrechnung (Abschnitt 2.3.2 auf Seite 14) kann man zeigen, dass eine Vervierfachung der Abtastrate den Fehler halbiert und damit die effektive Auflösung verdoppelt. Das SNR verbessert sich somit um 3 dB pro Verdoppelung von k.

Für eine 8-Bit äquivalente Auflösung eines Audiosignals ($f_{\max} = 20$ kHz) wäre damit bereits eine Abtastrate von ca. 2,5 MHz erforderlich! Die tatsächlich erforderliche Abtastrate ist aber wesentlich geringer, da durch die Rückkopplung eine Tiefpassfilterung des Quantisierungsrauschens („noise shaping“) wirksam wird (Tiefpass 1. Ordnung mit 6 dB / Okave) und man erhält dadurch insgesamt eine Verbesserung des Signal-Rauschverhältnisse um ca. 9 dB pro Verdoppelung der Überabtastrate k.

Die Abbildungen 115 bis 117 sollen die Wirkungsweise des Delta-Sigma-Wandlers illustrieren[13] [14].

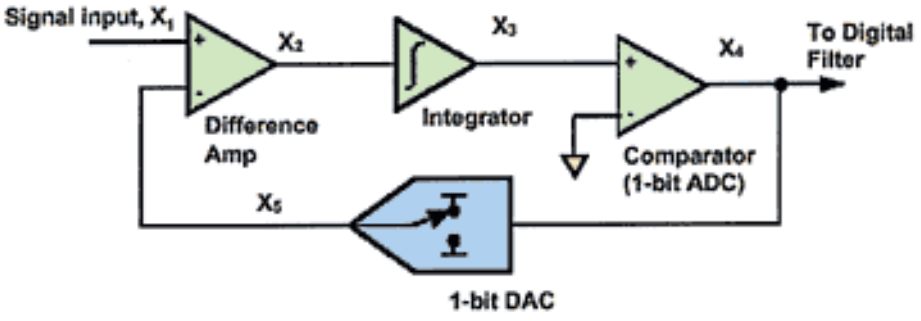

Abbildung 115: Ausführungsbeispiel für einen Delta-Sigma-Wandler 1. Ordnung

[13] http://www.sensorsmag.com/articles/0802/36/main.shtml
[14] http://www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/appnote_number/1870

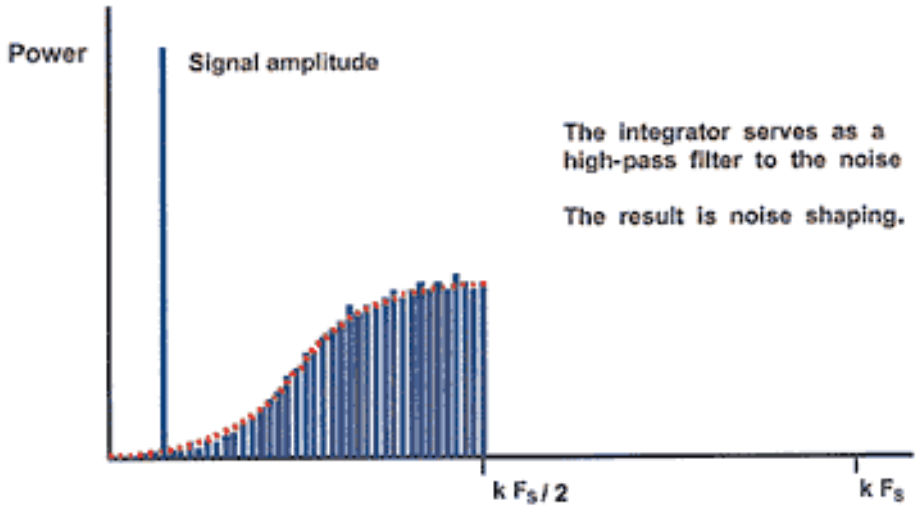

Abbildung 116: Hochpassfilterung des Quantisierungsfehlers („noise shaping“)

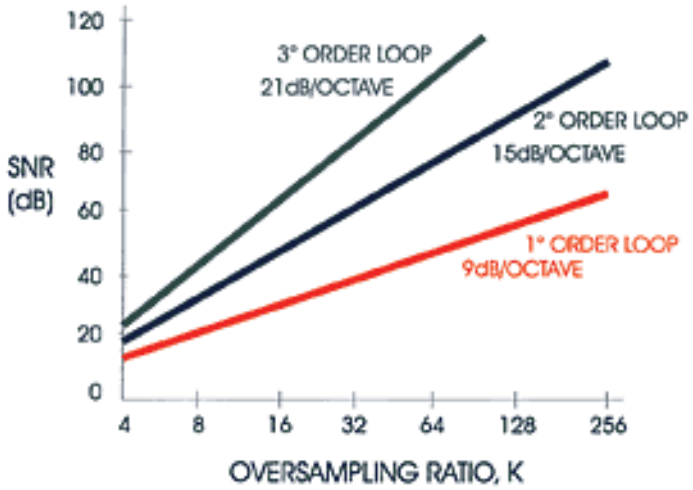

Abbildung 117: Erhöhung des SNR in Abhängigkeit von der Überabtastrate k bei Delta-Sigma-Wandlern unterschiedlicher Ordnung

8.4 Frequenz- und Zeitmessung

Frequenz und Zeitmessung sind eng miteinander verwandt. Bei der Zeitmessung werden Impulse eines Referenztaktes gezählt während bei der Frequenzmessung die Zahl der Schwingungen in einem bestimmten Zeitintervall gezählt werden. Für beide Messungen braucht man einen stabilen Taktoszillator.

8.4.1 Zeit- und Frequenznormal

Als Zeit- und Frequenznormale stehen Zeitzeichen- und Normalfrequenzsender zur Verfügung, wie z. B. der Sender DCF77 auf 77,5 kHz. Durch phasenstarres Anbinden eines lokalen Referenzoszillators an die Frequenz eines Normalfrequenzsenders sind Abweichungen von weniger als 10^{-10} realiserbar. Bereits einfache Quarzoszillatoren ohne Temperaturstabilisierung erreichen Frequenzabweichungen von weniger als 10^{-5}, was für viele Messungen in der Laborpraxis ausreichend ist.

8.4.2 Frequenzmessung

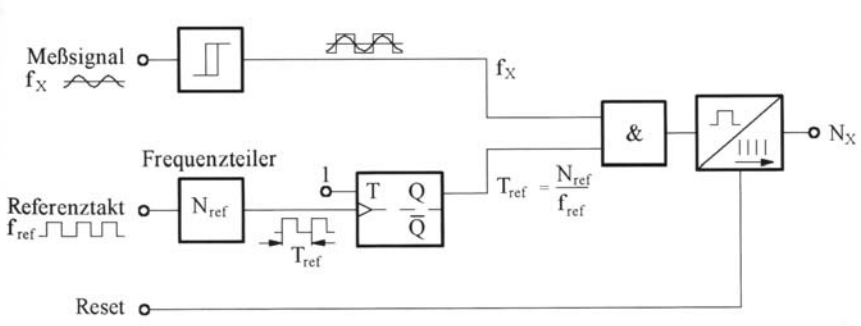

Abbildung 118: Prinzip der digitalen Frequenzmessung

Zur Frequenzmessung wird das zu messende periodische Signal mit Hilfe einer Schwellwertschaltung in ein Rechtecksignal gleicher Frequenz f_X umgewandelt. Die Zahl der Flanken dieses Signals werden während der sogenenannten Torzeit T_{ref} in einem Zähler gezählt (Abbildung 118). Die Frequenz ergibt sich definitionsgemäß als Zahl der Flanken pro Zeiteinheit:

$$f_X = \frac{N_X}{T_{\text{ref}}} = \frac{f_{\text{ref}}}{N_{\text{ref}}} N_x \tag{195}$$

Durch Umschalten des Frequenzteilers kann die Torzeit an die Frequenz f_X angepasst werden, wodurch sich eine Möglichkeit zur Messbereichsumschaltung ergibt. Vor jeder neuen Messung muss der Zählerstand zurückgesetzt werden.

Da der Zähler nur ganzzahlige Werte repräsentieren kann, ergibt sich eine Quantisierung mit einem absoluten Quantisierungsfehler von ± 1 gezählten Impulsen. Der relative Messfehler beträgt dann

$$\left|\frac{\pm 1}{N_X}\right| = \frac{1}{N_X} = \frac{1}{f_X\, T_{\text{ref}}} \tag{196}$$

Bei sehr niedrigen Frequenzen müsste die Torzeit entsprechend lang gewählt werden, um einen niedrigen Fehler zu erhalten. Daher empfiehlt sich bei niedrigen Frequenzen die Messung der Periodendauer.

8.4.3 Periodendauermessung

Bei der Zeitintervallmessung wird die Zeit zwischen zwei Ereignissen gemessen. Dazu werden die Taktimpulse des Referenzoszillators in der Zeit zwischen den beiden Ereignissen gezählt. Ein wichtiger Spezialfall der Zeitintervallmessung ist die Periodendauermessung zur Messung des Zeitintervalls zwischen z. B. 2 steigenden Flanken eines periodischen Signals (Abbildung 119). Durch die Torschaltung werden während der

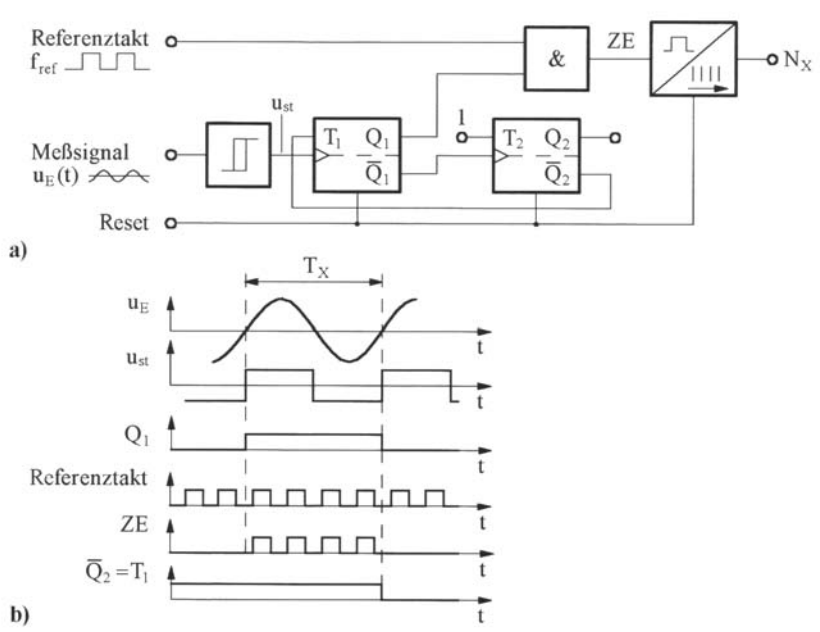

Abbildung 119: Periodendauermessung: a) Prinzip, b) Zeitverläufe

zu bestimmenden Periondendauer T_X die Impulse des Referenzoszillators f_{ref} gezählt. Aus der Zahl der gezählten Impuls N_X lässt sich die T_X berechnen.

$$N_X = f_{\text{ref}}\, T_X \tag{197}$$

$$\Longrightarrow T_X = \frac{N_{\text{ref}}}{f_{\text{ref}}} \tag{198}$$

Auch bei der Periodendauermessung ergibt sich durch den ganzzahligen Zählerstand N_X ein Quantisierungsfehler von ± 1. Der relative Fehler beträgt dann:

$$\left|\frac{\pm 1}{N_X}\right| = \frac{1}{T_X\, f_{\text{ref}}} = \frac{f_X}{f_{\text{ref}}} \tag{199}$$

Der Fehler wird umso kleiner, je kleiner der Quotient aus zu messender Frequenz f_X und Referenzfrequenz f_{ref} ist.

8.4.4 Phasenwinkelmessung

Ein weiterer Spezialfall der Zeitintervallmessung ist die Messung des Phasenwinkels φ_X zwischen zwei Spannungen gleicher Frequenz ω.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{u}_1 \sin(\omega\, t) \\ u_2(t) &= \hat{u}_2 \sin(\omega\, t + \varphi_X) \end{aligned} \tag{200}$$

Dazu wird die Schaltung in Abbildung 120 verwendet. Bei der jeweils steigenden Flanke der Eingangsspannung wird das zugehörige T-Flipflop gesetzt. Mit Hilfe der Antivalenzschaltung wird die Zeit vom positiven Nulldurchgang von u_1 bis zum positiven Nulldurchgang von u_2 als Torzeit für den Zähler gebildet.

$$\Delta t_X = \frac{N_X}{f_{\text{ref}}} \tag{201}$$

$$\Longrightarrow \varphi_X = 2\,\pi\,\frac{\Delta t_X}{T} = \omega\,\frac{N_X}{f_{\text{ref}}} \tag{202}$$

8.4.5 Frequenz-Spannungs-Umsetzer

Soll eine Frequenz als analoge Spannung gemessen bzw. in eine analoge Spannung umgewandelt werden, bedient man sich eines f/U-Umsetzers. Das zu wandelnde Signal muss dazu zunächst in eine unsymmetrische Rechteckspannung mit unsysmmetrischem Tastverhältnis umgewandelt werden. Der Mittelwert des sich ergebenden Signals ist dann ein Maß für die Frequenz. Das Rechtecksignal kann gemäß der Abbildung 122 erzeugt werden. Die monostabile Kippstufe liefert bei jeder steigenden Flanke der Eingangsspannung u_E einen Rechteckimpuls mit dem Scheitelwert U_0 und der Dauer T_0. Der zeitliche Mittelwert ergibt sich zu

$$\overline{u}_A = U_0\, T_0\, f_X \tag{203}$$

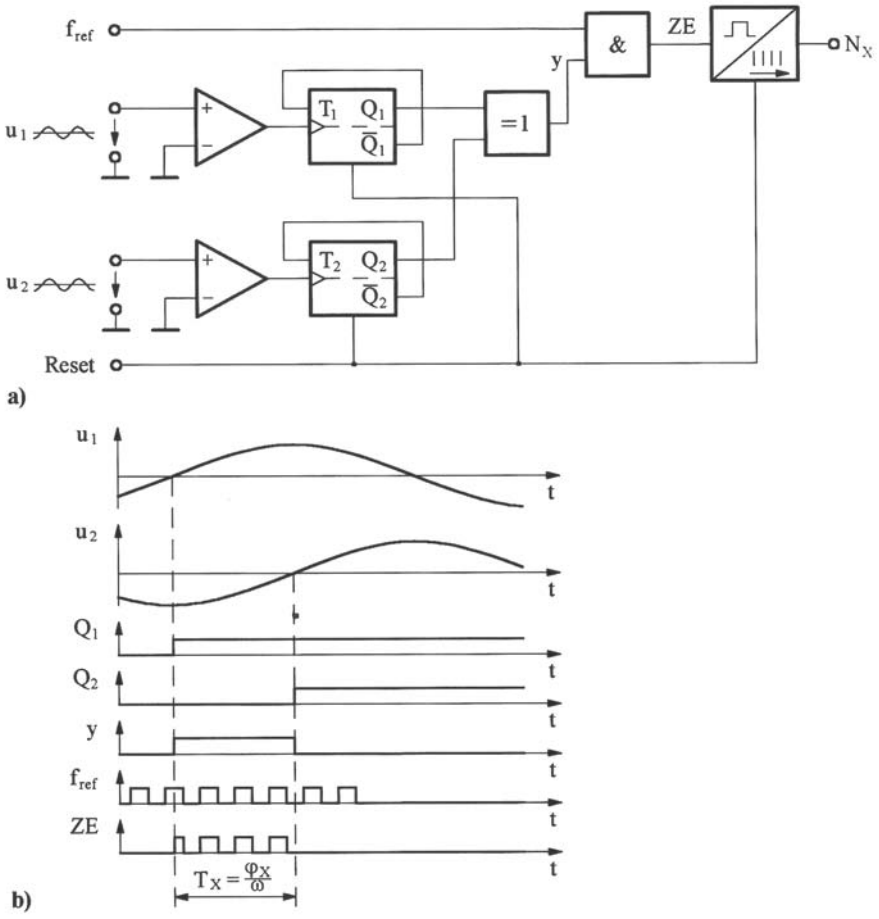

Abbildung 120: Phasenmessung: a) Prinzipschaltung, b) Spannungsverläufe

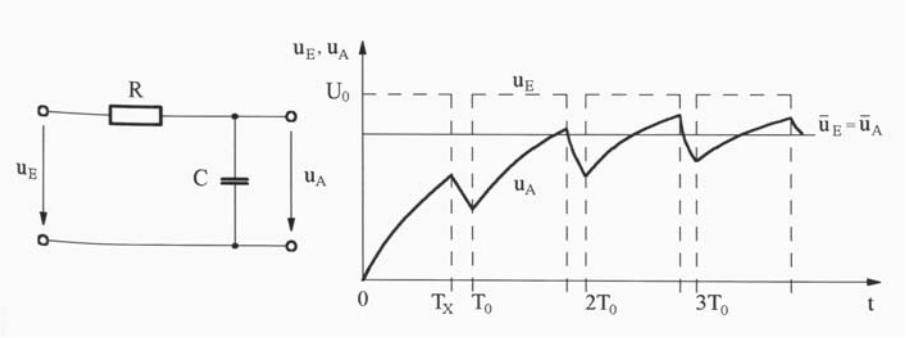

Abbildung 121: Prinzip der Frequenz-Spannungswandlung mit einfachem RC-Tiefpass

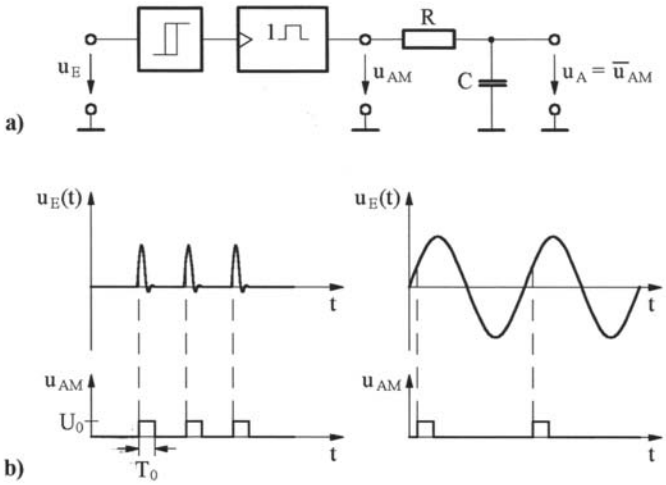

Abbildung 122: Frequenz-Spannungs-Umsetzer: a) Prinzipschaltbild, b) Spannungsverläufe

8.4.6 Fehler bei Frequenz- und Periodendauermessung

Quantisierungsfehler Die unvermeidlichen Quantisierungsfehler bei Frequenz- und Periodendauermessung wurden bereits in den Abschnitten 8.4.2 und 8.4.3 berechnet. In Abhängigkeit von verfügbaren Torzeiten T_{ref} (bei Frequenzmessung), Referenzoszillatorfrequenz f_{ref} (bei Periodendauermessung) und zu messender Frequenz f_X ist das eine oder andere Verfahren vorteilhaft. Bei der Frequenz f_{Xeq} sind die relativen Quantisierungsfehler von Periodendauermessung und Frequenzmessung gleich.

$$f_{\text{Xeq}} = \sqrt{\frac{f_{\text{ref}}}{T_{\text{ref}}}} \tag{204}$$

Fehler der Zeitbasis Eine weitere Fehlerquelle stellt der Fehler der Zeitbasis dar, 26.09.2005 16:13:32der durch $\Delta f_{\text{ref}}/f_{\text{ref}}$ angegeben wird.

Fehler durch überlagertes Rauschen Zusätzlich kann sich durch überlagertes Rauschen der Triggerzeitpunkt um $\pm\Delta T_{\text{Trigg}}$ verschieben. Bei der Frequenzmessung wird während der Torzeit viele Male getriggert, so dass hier durch Mittelung der resultierende Triggerfehler verringert wird. Dahingegen wird bei der Periodendauermessung die Zeit zwischen nur 2 Triggerereignissen ausgewertet. Es soll daher abgeschätzt werden, welcher Fehler durch ein überlagertes Rauschsignal mit dem Scheitelwert $\hat{U}_r$ hervorgerufen wird.

Die maximale Steigung einer sinusförmigen Spannung $u_m(t) = \hat{U}_M \sin\omega_X t$ tritt im Nulldurchgang auf.

$$\frac{du_m}{dt}|_{\max} = \hat{U}_m\, 2\,\pi f_X \tag{205}$$

$$\Delta T_{\text{Trigg}} = \frac{\hat{U}_r}{\frac{du_m}{dt}|_{\max}} = \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_m\, 2\,\pi\, f_X} \tag{206}$$

$$\frac{\Delta T_{\text{Trigg}}}{\Delta T_X} = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_m} \tag{207}$$

Der relative Triggerfehler $\Delta T_{\text{Trigg}}/\Delta T_X$ hängt daher vom Verhältnis der Rauschspannung zur Messspannung ab. Durch Mehrfachmessung und Mittelwertbildung kann der Fehler reduziert werden, allerdings auf Kosten der Messzeit.

9 Das Oszilloskop

Ein unentbehrliches Messinstrument zur Darstellung mehr oder weniger schnell veränderlicher Größen ist das Oszilloskop. Die Darstellung kann mit Hilfe einer konventionellen Kathodenstrahlröhre oder mit einem Flachbildschirm (z. B. LCD) erfolgen. Vom grundsätzlichen Aufbau unterscheidet man rein analog arbeitende Oszilloskope und digitale Speicheroszilloskope. Daneben gibt es auch Mischformen, d. h. analog anzeigende Oszilloskope mit Speichermöglichkeit.

9.1 Analog-Oszilloskop

Analog-Oszilloskope bieten die Möglichkeit zur Darstellung periodisch wiederkehrender Signale. Damit sich ein stabiles Schirmbild ergibt, sind eine Reihe von Schaltungsmaßnahmen erforderlich, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden.

9.1.1 Funktionsblöcke

Einen Überblick über die Funktionsblöcke eines analogen Oszilloskops gibt Abbildung 123 auf der nächsten Seite.

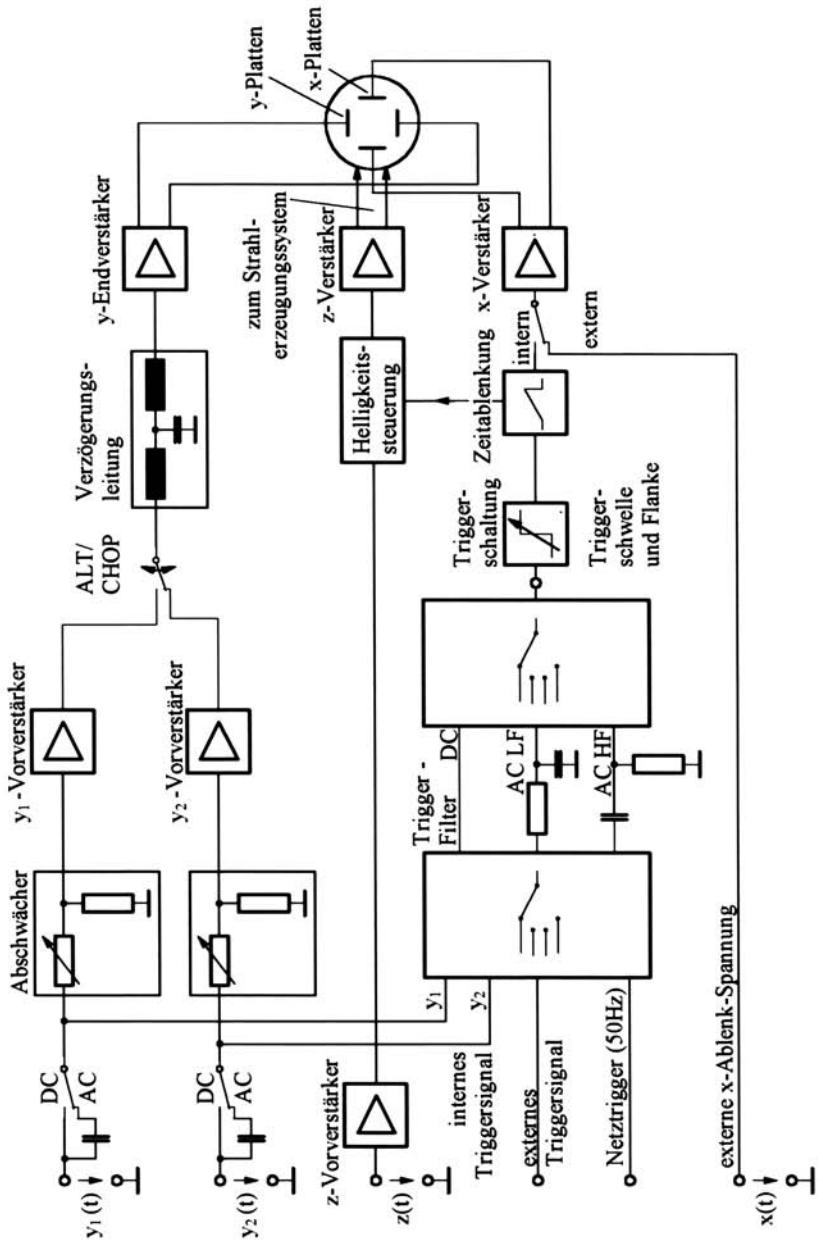

Abbildung 123: Blockschaltbild eines typischen Analog-Oszilloskops

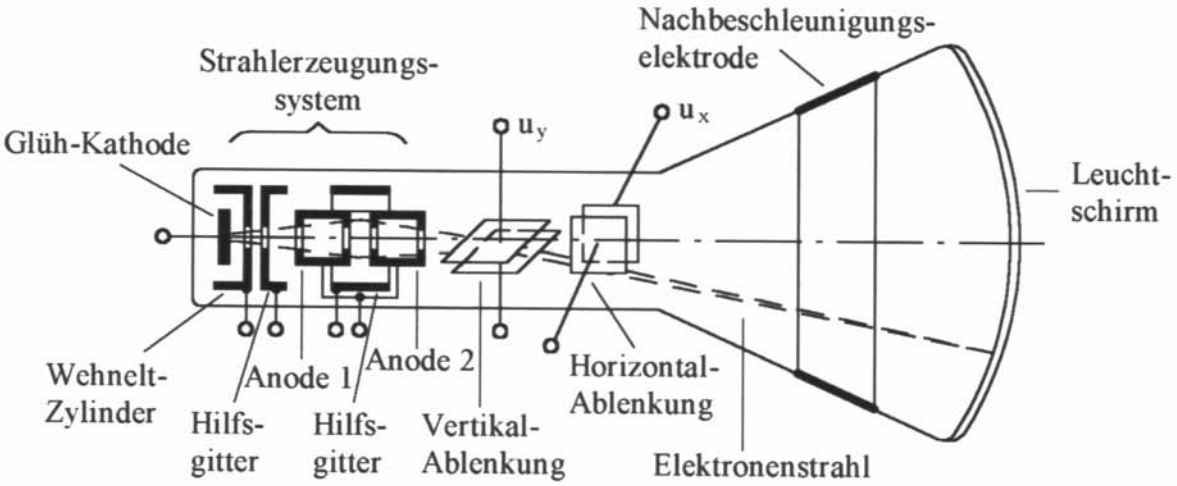

Abbildung 124: Kathodenstrahlröhre mit Ablenksystem

Der Aufbau der Kathodenstrahlröhre ist schematisch in Abbildung 124 dargestellt.

Abbildung 125 auf der nächsten Seite zeigt die Geometrie der elektrostatischen Strahlablenkung.

9.1.2 Betriebsarten und Bedienelemente

Zeitablenkungs- (*yt*-)Betrieb In den weitaus meisten Fällen wird das Oszilloskop im Zeitablenkungsbetrieb verwendet. Hierbei wird für die x-Ablenkung eine Ablenkspannung erzeugt, die proportional zur Zeit t ansteigt (Sägezahnspannung). Für die Zeit des Strahlrücklaufs erfolgt eine Dunkeltastung des Elektronenstrahls.

Die eingestellte Zeitablenkung bestimmt die Schreibgeschwindigkeit des Elektronenstrahls und damit die zeitliche Auflösung. Die Größe der y-Ablenkung wird mit Hilfe der y-Abschwächer (schaltbarer Eingangsspannungsteiler) festgelegt. Mit der in Abbildung 127 dargestellten verzögerten Zeitbasis ist es möglich, einen bestimmten Teilbereich des Signals mit zeitlicher Spreizung zu betrachten.

AC/DC-Kopplung In Stellung AC-Kopplung wird das Eingangssignal über einen Hochpass eingekoppelt. Gleichspannungsanteile werden dadurch unterdrückt. Bei der Darstellung niedrigfrequenter Signale muss jedoch die Grenzfrequenz des Hochpassfilters bedacht werden, die in der Regel im Bereich 5 . . . 20 Hz liegt. Bei DC-Kopplung wird das Eingangssignal direkt auf den Eingangsabschwächer gelegt.

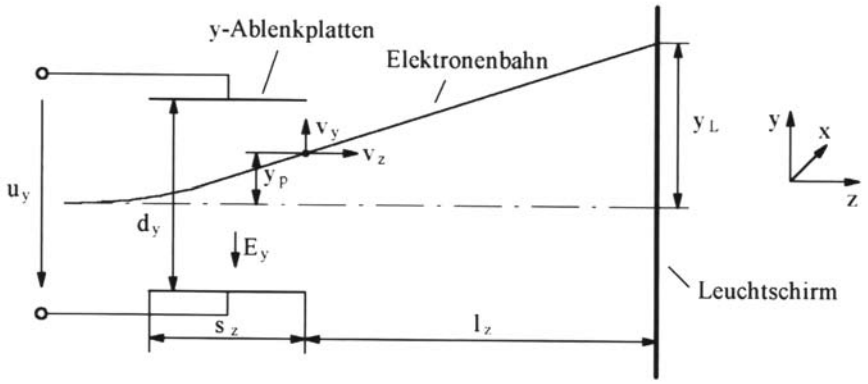

Abbildung 125: Elektrostatische Strahlablenkung

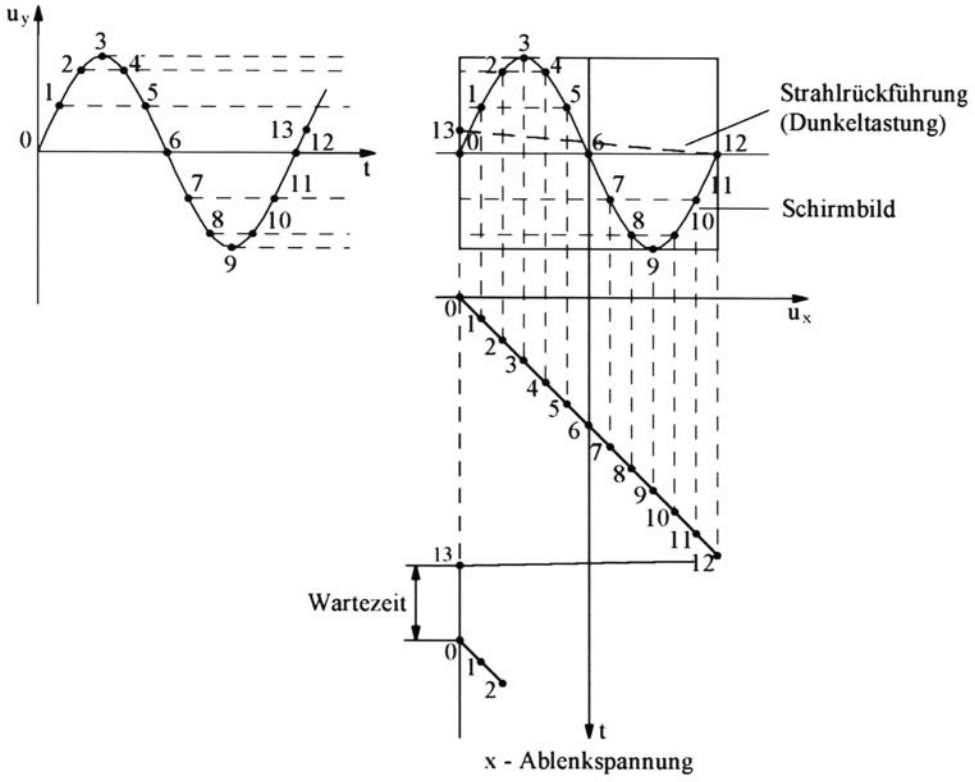

Abbildung 126: $yt-$Betrieb mit intern erzeugter $x-$Ablenkspannung

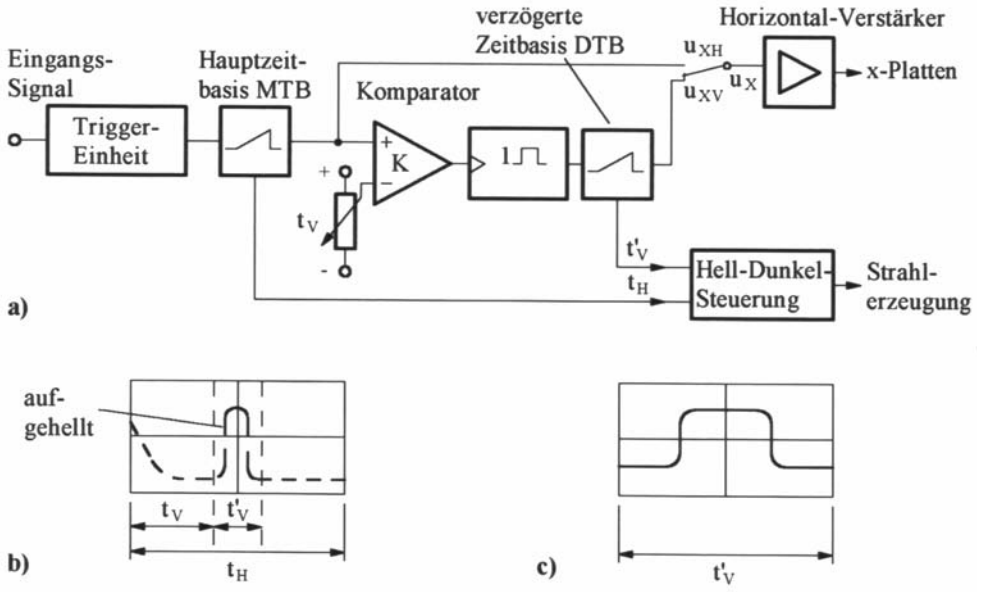

Abbildung 127: Zeitablenkung mit schaltbarer verzögerter Zeitbasis

ALT/CHOP Preisgünstige Zweikanaloszilloskope verfügen in der Regel nur über ein einziges Strahlablenksystem, das im Zeitmultiplex für mehrere Kanäle verwendet werden muss. Dazu wird die Zeitablenkung zwischen den beiden Eingangsverstärkern y_1 und y_2 hin und her geschaltet. Im alternierenden (ALT) Modus wird immer eine komplette $x-$Ablenkung durchgeführt, bevor zum jeweils anderen Eingang umgeschaltet wird. Beim „Zerhacker-"Betrieb (CHOP) wird während der jeweiligen $x-$Ablenkung sehr schnell zwischen den beiden Eingängen hin und her geschaltet. Je nach Ablenkgeschwindigkeit ist die eine oder andere Betriebsweise günstiger.

Trigger Mit Hilfe des Triggers wird der Beginn der Zeitablenkung bezogen auf das jeweilige Eingangssignal festgelegt. Hierbei können in der Regel mehrere Triggerquellen ausgewählt werden:

- Kanal 1
- Kanal 2
- externe Triggerquelle
- Netzspannung

Mit dem Triggerpegel wird die Spannung des gewählten Eingangssignals festgelegt, bei der die Zeitablenkung startet (Abbildung 128). Es kann auch ausgewählt werden,

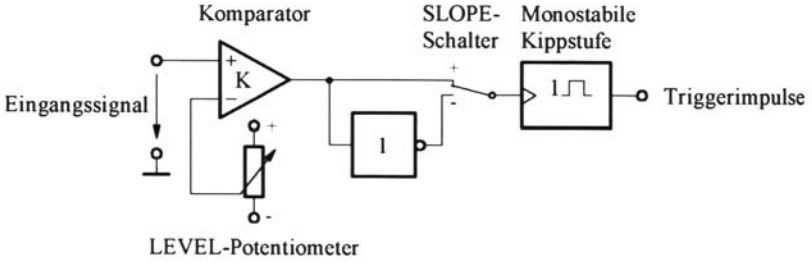

Abbildung 128: Einstellung und Erzeugung des Triggerimpulses

ob bei steigender oder fallender Flanke (slope) getriggert wird Es kann auch ausgewählt werden, ob bei steigender oder fallender Flanke (slope) getriggert wird (Abbildung 129).

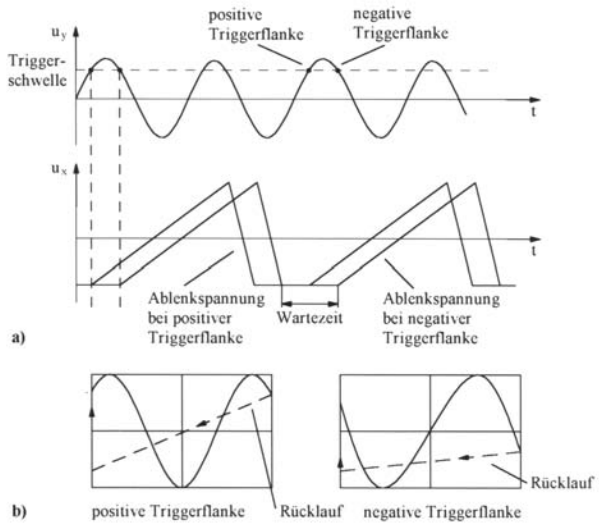

Abbildung 129: Einfluss von Triggerschwelle und Triggerflanke

9.1.3 Fehlereinflüsse

Tastkopfkompensation Der Eingangsverstärker eines Oszilloskop kann üblicherweise durch eine Ersatzschaltung eines hochohmigen Widerstands und eines Kondensators beschrieben werden. Ein typischer Wert ist 1 MΩ || 20 pF. Um das Messobjekt wenig zu belasten oder um ggf. höhere Spannungen zu messen, kann man einen Vorteiler in Form eines Tastkopfes vorschalten. Mit dem Eingangswiderstand des Oszilloskops ergibt sich hieraus ein Tiefpass, der durch einen Hochpass kompensiert werden muss. Um eventuelle Toleranzen ausgzugleichen wird der Kompensationskondensator C_T in der Regel als Trimmer ausgeführt. Typische Kurvenformen bei ideal rechteckförmigem Eingangssignal sind in Abbildung 130 dargestellt.

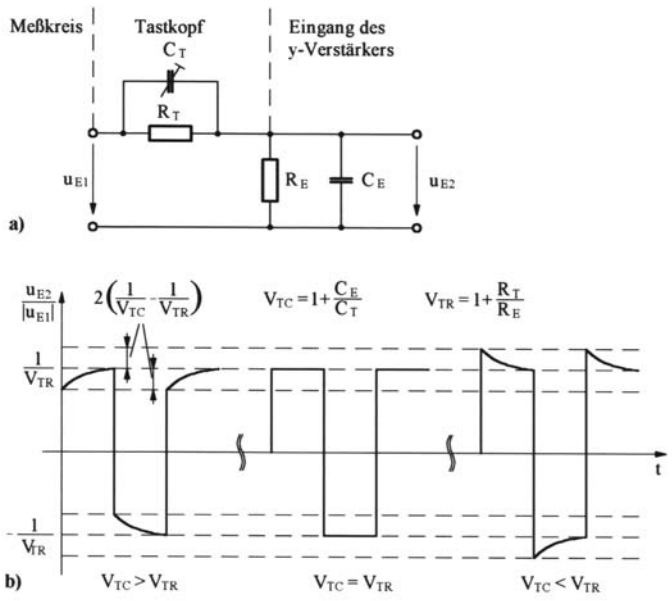

Abbildung 130: Tastkopfkompensation: a) Ersatzschaltung, b) Unterkompensation, c) Kompensation, d) Überkompensation

9.2 Digitalspeicher-Oszilloskop

Im Gegensatz zum Analog-Oszilloskop wird beim Digitalspeicher-Oszilloskop das Eingangssignal zunächst digitalisiert. Dazu wird in gleichen Zeitabständen eine

Analog-Digital-Wandlung durchgeführt und der jeweilige Spannungswert in den Speicher geschrieben. Es erfolgt daher sowohl auf der Zeitachse als auch auf der Spannungsachse eine Diskretisierung. Im Speicher liegen die jeweiligen Messpunkte vor, die zur Darstellung des Kurvenverlaufs auf dem Bildschirm entsprechend aufbereitet werden müssen (Abbildung 131)

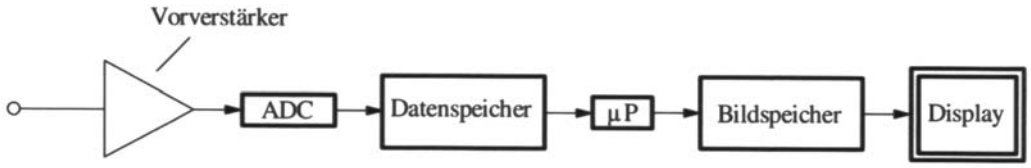

Abbildung 131: Vereinfachtes Blockschaltbild eines Digitalspeicher-Oszilloskops

Es ist zwingend erforderlich, dass das Abtast-Theorem eingehalten wird. Demnach muss die Abtastrate $f_s = 1/T_s$ (f_s sampling rate) mindestens doppelt so groß sein, wie die größte vorkommende Signalfrequenz f_g.

$$f_g = \frac{1}{2\,T_s} = \frac{f_s}{2} \tag{208}$$

Da in der Regel auch nicht-sinusförmige Signale abgetastet werden sollen (mit entsprechendem Oberschwingungsanteil) sollte die Abtastrate 10 mal höher sein als die Analogbandbreite f_a des Oszilloskops, d. h. $f_s \approx 10 \cdot f_a$.

Bei der Rekonstruktion der Messdaten erhält man streng genommen eine äquidistante Folge von Punkten, die nicht sehr augenfreundlich sind. Daher wird in der Regel zwischen den Abtastwerten interpoliert (Abbildung 132).

9.2.1 Funktionsblöcke

Bis zum AD-Wandler weisen Digitaloszilloskope die gleichen Eingangsbaugruppen auf wie Analogoszilloskope (Abbildung 133 auf Seite 130). Nach der Digitalisierung liegen in der Regel zeitlich äquidistante Stützstellen des Spannungsverlaufs vor, die vielfältig numerisch verarbeitet und anschließend wieder angezeigt werden können. Soll die Anzeige auf einer konventionellen Kathodenstrahlröhre erfolgen, so müssen die digitalen Spannungswerte wieder in analoge Werte zurückverwandelt werden.

9.2.2 Betriebsarten

Im folgenden sollen kurz einige wichtige Betriebsarten erläutert werden.

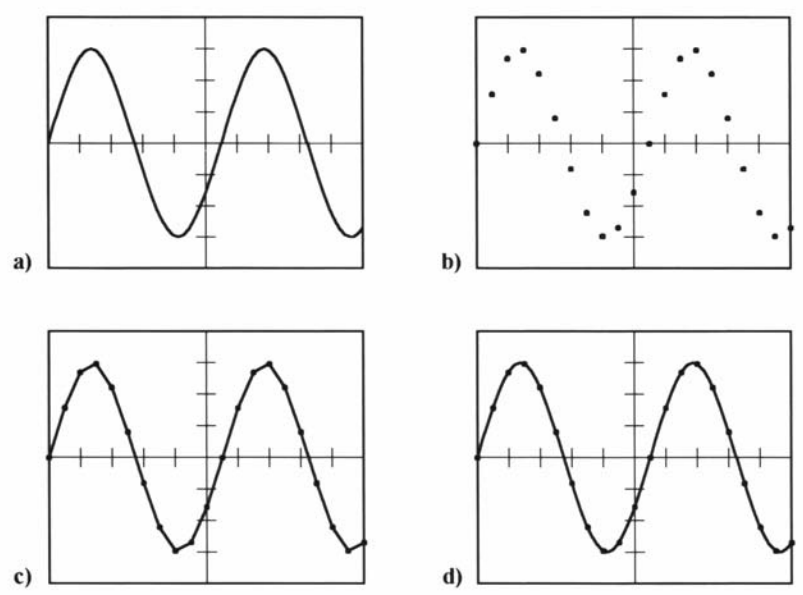

Abbildung 132: Darstellungsarten bei DSO: a) Originalsignal; b) Punktdarstellung; c) lineare Interpolation; d) Sinusinterpolation

- $y(t)$ **mit zeitlich äquidistanter Abtastung**
  Entsprechend der gewählten Abtastrate werden in einem festgelegten Zeitraster die Spannungswerte gewandelt und abgespeichert. Kurzzeitige Spannungsspitzen, die zwischen zwei Abtastungen auftreten, bleiben unentdeckt.

- $y(t)$ **mit Spitzenwerterkennung** (peak detect / glitch detect)
  Ein mitlaufender Spitzenwertdetektor erkennt Spannungsspitzen unabhängig vom zeitlichen Abtastraster und sorgt dafür, dass diese berücksichtigt werden. Insbesondere Induktionsspannungspitzen sind damit besser aufzulösen, aber auch Rauschen wird hervorgehoben.

- $y(t)$ **Mittelwertbildung** (average)
  Es wird der Mittelwert mehrerer (Anzahl einstellbar) aufeinander folgender Spannungsverläufe gebildet. Dadurch wird das Rauschen reduziert, die Kurven werden glatter. Voraussetzung ist jedoch unbedingt ein streng periodisches Signal mit festem Triggerzeitpunkt.

- $y(t)$ **mathematische Funktionen**
  Je nach Modell gibt es eine Reihe fest implementierer mathematischer Funktionen zur Berechnung wichtiger Kennwerte (Frequenz, Periodendauer, Scheitelwert, Effektivwert, Mittelwert etc.) sowie zur Fourier-Transformation (FFT).

- $y(t)$ **rollierend**
  Bei sehr langsam veränderlichen zeitlichen Vorgängen wird der Spannungsver-

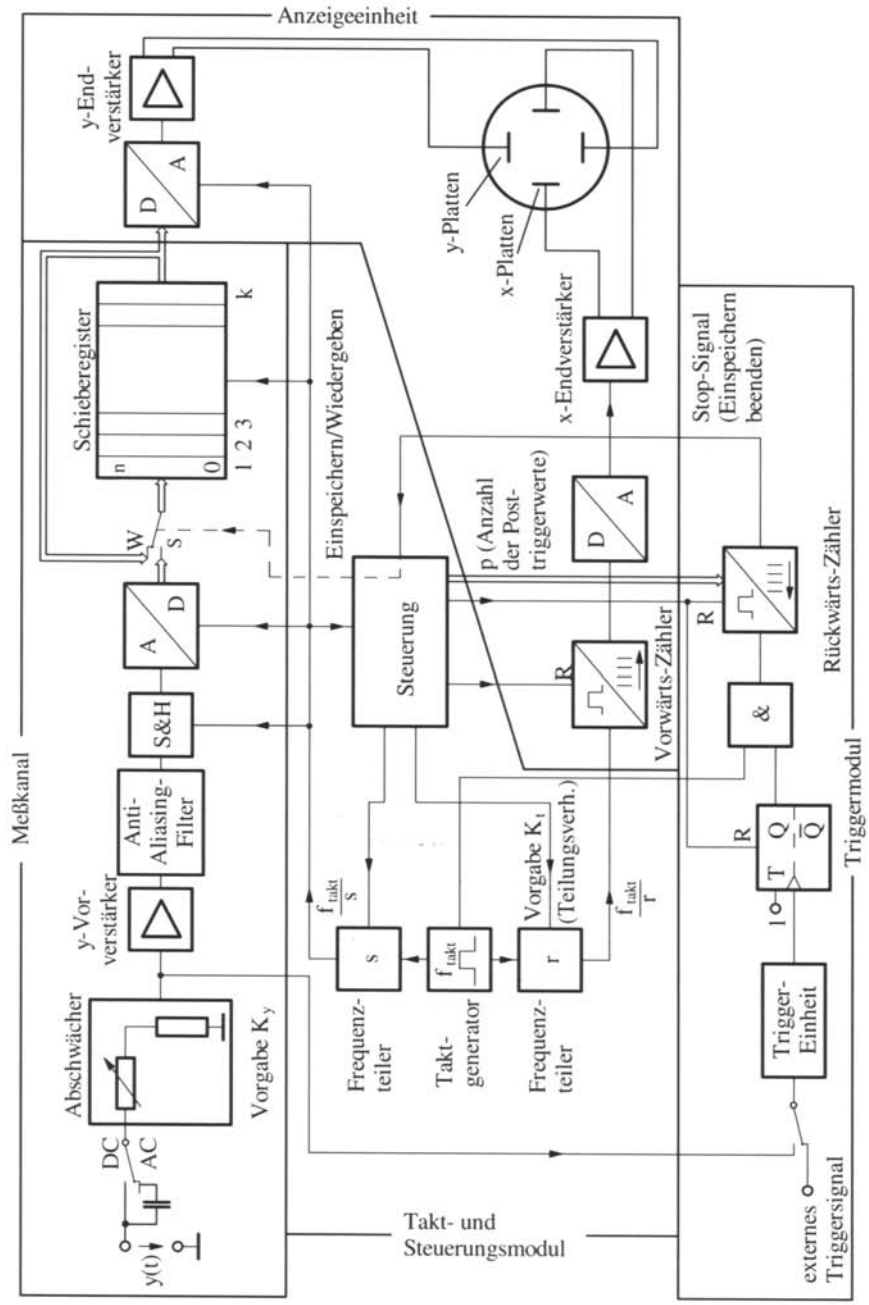

Abbildung 133: Blockschaltbild eines Digitalspeicher-Oszilloskops mit analoger Anzeigenröhre

lauf kontinuerlich über den Bildschirm geschoben. Es entsteht ein ähnlicher Eindruck wie bei einem elektromechanischen y(t)-Schreiber.

- *xy*-**Betrieb**

Wie beim Analogoszilloskop ist auch beim Digitaloszilloskop $x-y$-Betrieb möglich. Wegen der Speichermöglichkeit können auch sehr langsame Vorgänge ähnlich wie auf einem xy-Schreiber dargestellt werden.

10 Messung nichtelektrischer Größen

Vielfach müssen auch physikalische Größen x_{ph} gemessen werden, die nicht unmittelbar als elektrische Größe x_e vorliegen. Die allgemeine physikalische Größe muss daher zunächst in eine geeignete elektrische Größe umgeformt werden. Diese Umformung wird in der Regel von Sensoren vorgenommen, die je nach Anwendung bereits mit signalverarbeitenden Schaltungen gekoppelt sein können. Bevorzugt wird die physikalische Größe in Spannung, Strom, Widerstand oder Kapazität umgesetzt. Für die Auswertung ist es wichtig, dass die Funktion $x_e = f(x_{\text{ph}})$ zumindest streng monoton ist, damit die Umkehrfunktion $x_{\text{ph}} = f^{-1}(x_e)$ gebildet werden kann.

10.1 Temperatur

Die Funktion elektrischer und elektronischer Schaltungen wird ganz wesentlich von der Temperatur beeinflusst. Daher ist bei vielen Geräten eine Temperaturüberwachung integriert. Auch bei der Automatisierung von Prozessen spielt häufig die Temperaturmessung eine wichtige Rolle.

Aufgrund des Wirkprinzips kann man in der praktischen Anwendung im wesentlichen die folgenden Gruppen von Sensoren unterscheiden:

- Widerstandsthermometer (Metall, Halbleiter, Oxidkeramik)
- Flussspannung eines pn-Übergangs
- Thermoelemente

Die Widerstandsthermometer werden noch in PTC- (*positive temperature coefficient*) und NTC- (*negative temperature coefficient*) Widerstände eingeteilt. Grundsätzlich haben alle Metalle eine PTC-Charakteristik.

Sensortyp	Beispiel	Wirkprinzip
Kaltleiter	Pt100, Pt1000	spez. Widerstand $\rho = \rho(\vartheta)$
Kaltleiter (n-Silizium)	KTY xyz	spez. Widerstand $\rho = \rho(\vartheta)$
Heißleiter (NTC)	Thermistor	spez. Widerstand $\rho = \rho(\vartheta)$
pn-Übergang	Diode, Bipolartransistor	Flussspannung $U_F = U_F(\vartheta)$
Thermoelement	NiCr-NiAl	Thermospannung $U_T = U_T(\Delta\vartheta)$

Tabelle 7: Gebräuchliche Prinzipien zur Temperaturmessung

Bei der Temperaturmessung ist neben der absoluten Temperatur (Kelvin-Skala) die Celsius-Skala gebräuchlich. Für die absolute Temperatur wird üblicherweise das Formelzeichen T verwendet für die Celsius-Temperatur das Zeichen ϑ. Zur Vermeidung

von Missverständnissen werden Temperaturdifferenzen immer in Kelvin angegeben, d. h. die Differenz zweier Celsius-Werte ergibt einen Wert in Kelvin.

10.1.1 Temperaturabängige Widerstände

Kaltleiter (PTC) und Heissleiter (NTC) kann man unter dem Oberbegriff Widerstandstemperaturfühler zusammenfassen, häufig abgekürzt als RTD (**r**esistive **t**emperature **d**etector).

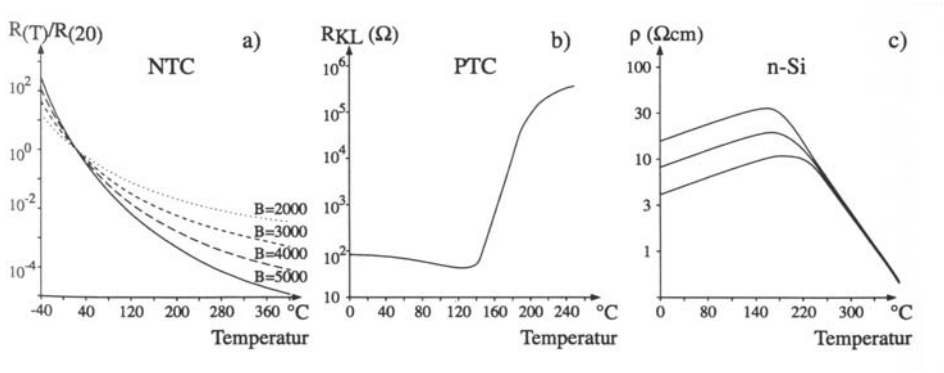

Abbildung 134: Kennlinien verschiedener Widerstands-Temperatursensoren

Metalle als Kaltleiter Mit zunehmender Temperatur steigt der Widerstand von Metallen an. Innerhalb kleiner Temperaturbereiche ist dieser Anstieg näherungsweise linear mit ca. 0,4 % Widerstandserhöhung pro Grad Temperaturanstieg. Dieses Verhalten ist typisch für die in der Elektrotechnik üblicherweise verwendeten Leitungsmetall wie z. B. Kuper, Silber, Gold und Aluminium. Wegen der positiven Geradensteigung spricht man von einem positiven Temperaturkoeffizienten (PTC - **p**ositive **t**emperature **c**oefficient).

Für die Messtechnik gebräuchlich sind z. B. Platin-Temperaturfühler, die mit unterschiedlichem Nennwiderstand R_0 (bei Bezugstemperatur $\vartheta_0 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$) erhältlich sind: 100 Ω (Pt100), 200 Ω (Pt200), 500 Ω (Pt500) und 1000 Ω (Pt1000).

Soll ein Temperaturbereich von $0\ ^\circ\mathrm{C} < \vartheta < 850\ ^\circ\mathrm{C}$ überstrichen werden, genügt die lineare Näherung nicht mehr aus und es muss ein Korrekturterm berücksichtigt werden:

$$R_\vartheta \;=\; R_0 \left\langle 1 \,+\, 3{,}90802 \cdot 10^{-3} \frac{\vartheta}{\mathrm{K}} \,-\, 0{,}580195 \cdot 10^{-6} \frac{\vartheta^2}{\mathrm{K}^2} \right\rangle \qquad (209)$$

Da in Gleichung (209) streng genommen die Differenz der Temperatur zur Bezugstemperatur 0 °C eingeht, sind Kelvin-Werte einzusetzen. Dies erklärt, warum im Nenner

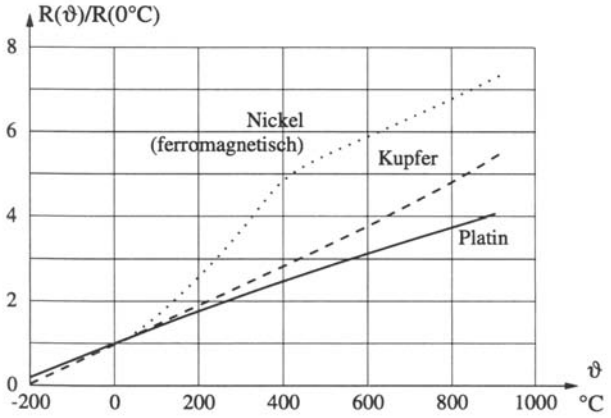

Abbildung 135: Kennlinie gängiger Metalle

K und nicht etwa °C stehen muss. Dieser feine Unterschied wird nicht immer korrekt berücksichtigt, was an den Zahlenwerten aber nichts ändert.

Sollen auch Temperaturen unter 0 °C gemessen werden, so ist Gleichung (209) durch weitere Korrekturterme 3. und 4. Ordnung zu ergänzen (vgl. DIN 43760 und IEC 571).

10.1.2 Silizium als Kaltleiter

Bei undotierten (intrinsischen) Halbleitern nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur ab, da sich durch thermische Anregung die Ladungsträgerkonzentration erhöht. Durch geeignete Dotierung kann erreicht werden, dass in einem bestimmten Temperaturbereich alle Störstellen ionisiert sind und daher die Ladungsträgerkonzentration konstant bleibt. Eine Temperaturerhöhung führt dann zu einer Reduktion der Ladungsträgerbeweglichkeit und somit zu einer Erhöhung des Widerstands (Abbildung 134). Der Temperaturkoeffizient ist etwa doppelt so groß wie bei Metallen. Dadurch verdoppelt sich auch die Sensorempfindlichkeit. Der nutzbare Temperaturbereich beträgt ca. $-50\,°\mathrm{C} < \vartheta < 150\,°\mathrm{C}$. Bei weiterer Erwärmung über ca. $150°C$ hinaus nimmt der Widerstand jedoch wieder mit steigender Temperatur sehr stark ab.

10.1.3 Heissleiter

Wie der Name schon vermuten läßt, leiten Heissleiter bei hohen Temperaturen besser, d. h. der Widerstand sinkt mit steigender Temperatur (NTC - **n**egative **t**emperature **c**oefficient). Solche Thermistoren werden überwiegend aus Metalloxid-Keramik hergestellt und haben innerhalb gewisser Grenzen halbleitende Eigenschaften.

Die Temperaturabhängigkeit des Widerstands R_T läßt sich durch folgende Gleichung

beschreiben:

$$R_T = R_N \cdot \exp\left[B\left\langle\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N}\right\rangle\right] \tag{210}$$

Zu beachten ist, dass hier absolute Temperaturen in Kelvin einzusetzen sind, R_N ist der Nennwiderstand bei der Nenntemperatur T_N. Die Konstante B ist abhängig vom Typ des Thermistors. Abbildung 136 veranschaulicht den Verlauf $R_T(T)$ für verschiedene Werte von B.

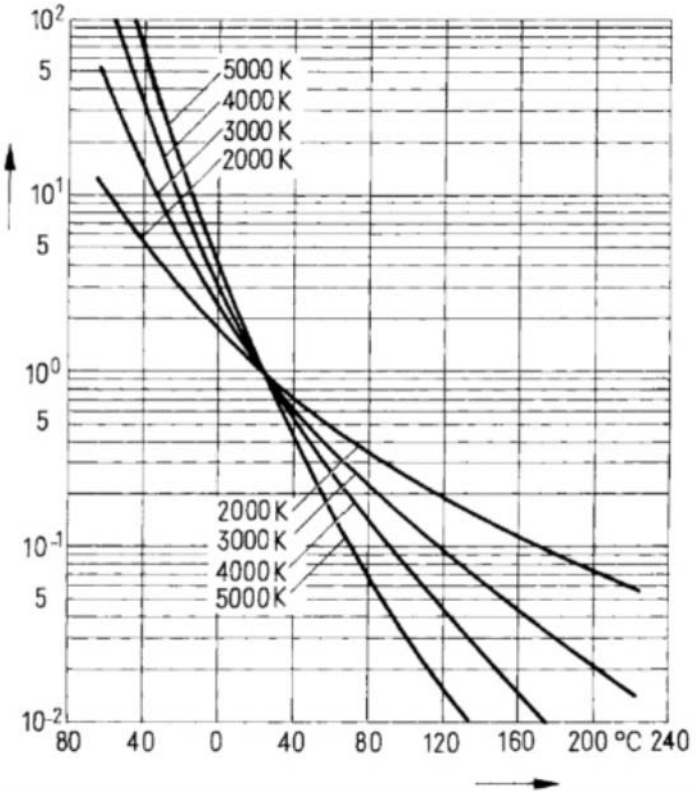

Abbildung 136: Beispiel für Thermistorkennlinien, $T_N = 25\ °C$, B als Parameter. Aufgetragen ist R_T/R_N über der Temperatur ϑ

Gleichung (210) läßt sich nach der Temperatur T umstellen, so dass bei einer Messung von R_T die Temperatur T berechnet werden kann.

10.1.4 Flussspannung eines pn-Übergangs

Die Eigenschaften von pn-Übergängen sind sehr stark temperaturabhängig. Der Sperrstrom eines Silizium-Bipolartransistors verdoppelt sich bei jeder Temperaturerhöhung von ca. 10 K, die Flussspannung der Basis-Emitter-Diode sinkt um ca. 2 mV / K. Grundsätzlich kann dieser Effekt zur Temperaturmessung verwendet werden. Da die

Flussspannung jedoch starken Exemplarstreuungen unterliegt, ist je nach Anforderungen an die Messgenauigkeit eine individuelle Kalibrierung notwendig. Als universelle

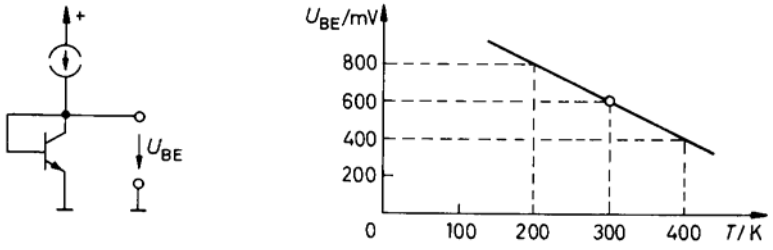

Abbildung 137: Temperaturabhängigkeit der Basis-Emitter-Spannung

Temperatursensoren besser geeignet sind sogenannte Bandabstands-Referenzen (band gap reference, Abbildung 138). Hierbei wird die Differenz der Basis-Emiter-Spannung von zwei bei unterschiedlichen Kollektorströmen bzw. Kollektorstromdichten betriebenen Transistoren ausgewertet. Man erhält als Ausgangsspannung $U_{\mathrm{Temp}}(T) = 2\ \mathrm{mV/K \cdot T}$, d. h. $U_{\mathrm{Temp}}(T) \propto T$. Als Nebenprodukt erhält man eine temperaturunabhängige Spannung $U_{\mathrm{BG}} = 1{,}23\ \mathrm{V}$, die als Referenzspannungsquelle bei AD- oder DA-Umsetzern verwendet werden kann.

Bandabstands-Referenzen sind als integrierte Schaltungen erhältlich und relativ unkompliziert in der Anwendung.

10.1.5 Thermoelement

Werden zwei unterschiedliche Metalle miteinander in Kontakt gebracht, so können die freien Leitungselektronen von einem Metall zum anderen übergehen. Dadurch kann abhängig von den Materialeigenschaften und der Temperatur eine Kontaktspannung auftreten. Werden Kontaktstellen auf unterschiedlicher Temperatur gehalten, so stellt sich eine Thermospannung ein, die von der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen abhängt.

Für den praktischen Einsatz wird eine Kontaktstelle als Messsonde ausgeführt und

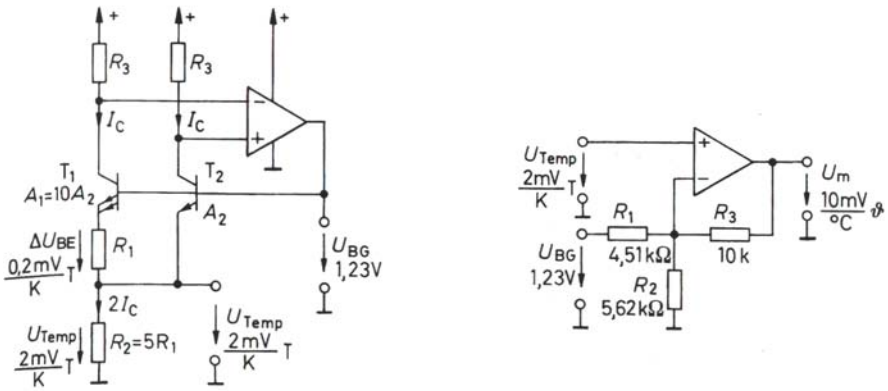

Abbildung 138: Bandabstandsreferenz als absoluter Temperatursensor (links), Zusatzschaltung zur Realisierung eines Celsius-Nullpunkts (rechts)

die weiteren Kontaktstellen auf konstanter und bekannter Temperatur gehalten. Dies kann durch Verwendung eines sogenannten isothermen Blocks erreicht werden, dessen Temperatur durch ein weiteres, unabhängiges Thermometer gemessen wird. Ist die Temperatur der Messstelle gleich der Temperatur der Vergleichsstelle, so ist die Thermospannung 0, bei höherer Temperatur positiv und bei niedrigerer Temperatur entsprechend negativ.

Historisch bedingt wurde die Thermospannung auf eine Vergleichsstellentemperatur von 0°C bezogen. Eine von 0°C abweichende Temperatur des isothermen Blocks kann leicht entweder durch elektronische Schaltungstechnik oder durch entsprechende Software korrigiert werden.

Abbildung 139 zeigt schematisch eine Anordnung mit der Messstelle auf Temperatur ϑ_M und der Vergleichsstelle auf Temperatur ϑ_V. Weicht ϑ_V von der Referenztemperatur 0°C ab, so wird eine entsprechende Spannung zur Thermospannung addiert. Dies ist in der Abbildung schematisch als Reihenschaltung dargestellt, in der Praxis kann eine analoge Summierschaltung verwendet werden.

Bei der reinen Software-Lösung wird die Korrektur erst nach erfolgter Digitalisierung vorgenommen.

Je nach Einsatzbereich sind unterschiedliche Materialpaarungen gebräuchlich. Abbildung 140 zeigt, dass auch bei Temperaturen von weit über 100°*C* die Thermospannungen nur im mV-Bereich liegen. An die Spannungsmessung sind demzufolge hohe Anforderungen zu stellen. Das gebräuchliche Thermoelement Typ K (NiCr-NiAl bzw. Chromel-Alumel) weist eine Kennliniensteigung von $40,5\ \mu\mathrm{V/K}$ auf. Entsprechend hochauflösend und genau ist die Schaltung für die Spannungsmessung auszulegen.

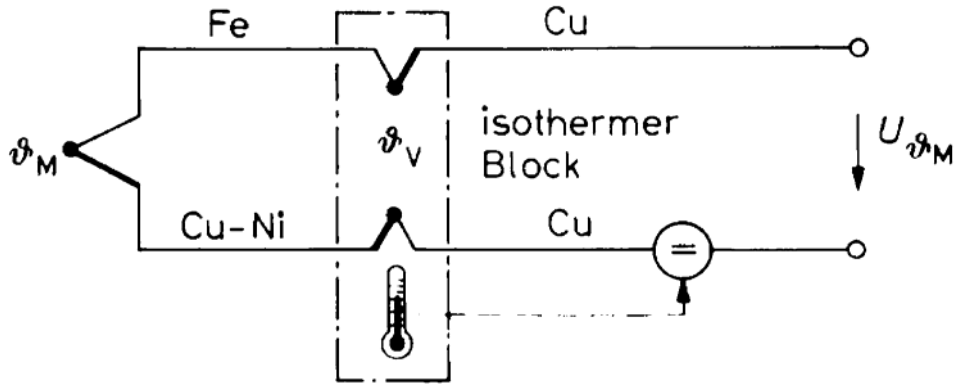

Abbildung 139: Isothermer Block für Thermoelement-Betrieb

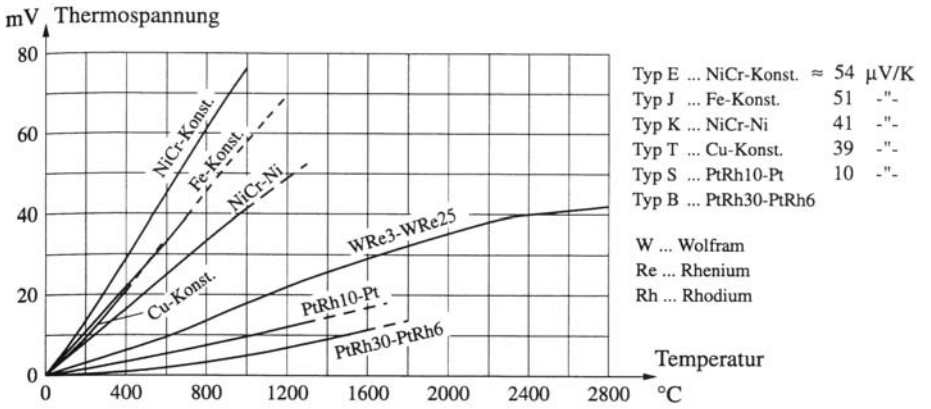

Abbildung 140: Kennlinien unterschiedlicher Thermoelement-Typen

10.2 Luftfeuchtigkeit

Neben der Temperatur ist vor allem die relative Luftfeuchtigkeit ein wichtiger Umgebungsparameter für den Betrieb von Geräten und den Ablauf von Prozessen. Je höher die Temperatur ist, desto mehr Wasser kann die Luft absolut aufnehmen. Die relative Luftfeuchtigkeit hingegen gibt den Prozentsatz der aufgenommenen Wassermenge bezogen auf mit Feuchtigkeit gesättigte Luft an.

Insbesondere beim Auftreffen warmer Luft auf kalte Oberflächen kann durch Abküh-

len der Luft deren relative Feuchtigkeit so weit ansteigen, dass der sogenannte Taupunkt unterschritten wird, d. h. die Feuchtigkeit kondensiert.

Seit langem bekannt ist die Längenänderung von tierischen oder menschlichen Haaren bei Änderung der Luftfeuchtigkeit. Die Längenänderung des Haars wird auf einen Zeiger übertragen (ähnlich wie beim Hitzdrahtinstrument). Dieses Prinzip wird noch vielfach in Hygrographen zur Dokumentation des Feuchteverlaufs angewendet (z. B. in Museen).

Eine weitaus bessere Kompatibilität mit elektrischen Messverfahren weisen die kapazitiven Feuchtesensoren auf. Herzstück dieser Sensoren ist ein Kondensator mit einem offenporigen Dielektrikum.

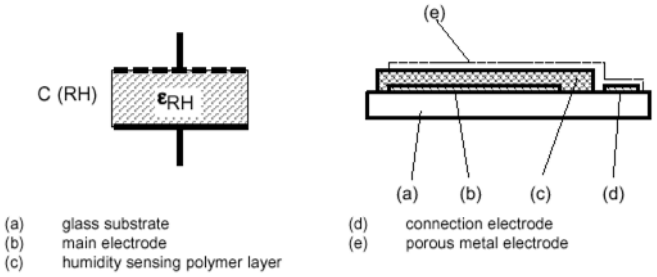

Abbildung 141: Beispiel für kapazitiven Feuchtesensor

Wird dieser Kondensator als frequenzbestimmendes Bauelement einer Oszillatorschaltung verwendet, erhält man eine von der eingelagerten Wassermenge abhängige Frequenz. Das im Dielektrikum eingelagerte Wasser wiederum steht im Gleichgewicht mit der umgebenden Luft, so dass die Frequenz ein Maß für die relative Luftfeuchtigkeit ist. Diese Frequenz kann direkt gemessen werden oder nach einer U(f)-Wandlung einem AD-Umsetzer zugeführt werden.

Ein weiteres gebräuchliches Messverfahren nutzt die Widerstandsänderung hygroskopischer Substrate wie z. B. LiCl. Je höher die Luftfeuchtigkeit ist, desto mehr Wasser wird in das Material eingelagert und desto geringer ist der Widerstand.

Literatur

[1] Lerch R.,
Elektrische Messtechnik,
Springer Verlag (Berlin 2004)

[2] Patzelt R., Schweinzer H.,
Elektrische Messtechnik,
Springer Verlag (Wien 1996)

[3] Schrüfer E., Elektrische Messtechnik,
Hanser Verlag (München 2003)

[4] Felderhoff R., Freyer U., Elektrische und elektronische Messtechnik,
Hanser Verlag (München 2002)

[5] Bergmann K., Elektrische Meßtechnik,
Vieweg Verlag (Braunschweig 1997)

[6] Tietze U., Schenk Ch.,
Halbleiterschaltungstechnik,
Springer Verlag (Berlin 2002),

[7] Heinemann R.,
PSpice Elektroniksimulation,
Hanser Verlag (München 2004)

[8] Schwenk E., Mein Name ist Becquerel,
dtv, München (1993)

[9] Scholz G., Vogelsang K., Einheiten, Formelzeichen, Größen,
Fachbuchverlag Leipzig (Leipzig 1991)

[10] Abramowitz M., Stegun I. A. (Eds.), Handbook of Mathematical Functions,
Dover Publications (New York 1970)

[11] Kitchin C., Counts L., RMS to DC Conversion Application Guide,
2nd Edition, Analog Devices (1986)

Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung im Internet:
http://www.home.hs-karlsruhe.de/~ wokl0001